Combinatoire et matrices

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Combinatoire et matrices***

Soient $A_0 = B_0 = ((1)) \in M_1(\mathbb{R})$. *Pour* $n \geq 1$ *on définit les suites de matrices par*

$$A_n = \begin{pmatrix} A_{n-1} & A_{n-1} \\ A_{n-1} & B_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \mathrm{B_n} = \begin{pmatrix} A_{n-1} & A_{n-1} \\ A_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M_{2n}}(\mathbb{R}).$$

Montrer que

$$S(A_n^{k-1}) = S(A_k^{n-1}), \forall\, n, k \in \mathbb{N}^\star$$

avec $S(M) = \sum_{1\leq i,j\leq n} m_{ij}$ *où* $M = ((m_{ij}))$.

Solution : *L'astuce (redoutable) consiste à donner un « sens combinatoire » à la quantité* $S(A_n^{k-1})$. *Pour cela soit* T *un tableau* $n \times k$ *à coefficients* 0 *et* 1 *(i.e. un élément de* $M_{n,k}(0,1)$*) vérifiant la propriété suivante :* « il n'existe dans T aucune sous matrice 2×2 constituée uniquement de 1 » *et soit* $F_{n,k}$ *le nombre de tels tableaux.*

Chaque ligne d'un tableau correspond à un entier entre 0 *et* $2^n - 1$ *écrit en base* 2. $F_{n,k}$ *est donc le nombre de* k*-uplets d'entiers dont toute paire d'entiers consécutifs correspond à un tableau* $n \times 2$ *sans sous-matrice .* 2×2 *constituée uniquement de* 1.

Soient $\overline{i_n i_{n-1} \dots i_1}$, $\overline{j_n j_{n-1} \dots j_1}$ *les écritures en base* 2 *de deux entiers* $i, j \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$. *Deux cas sont à envisager :*

- Si $i_n j_n = 0$ *alors* $\overline{i_n i_{n-1} \dots i_1}$ *et* $\overline{j_n j_{n-1} \dots j_1}$ *sont consécutifs si et seulement si* $\overline{i_{n-1} \dots i_1}$ *et* $\overline{j_{n-1} \dots j_1}$ *le sont.*

- Si $i_n j_n = 1$ *alors* $\overline{i_n i_{n-1} \dots i_1}$ *et* $\overline{j_n j_{n-1} \dots j_1}$ *sont consécutifs si et seulement si* $i_{n-1} j_{n-1} = 0$ *et* $\overline{i_{n-2} \dots i_1}$ *et* $\overline{j_{n-2} \dots j_1}$ *le sont.*

Ainsi

Références