Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

On considère les plans $\mathscr{P}$ *et* $\mathscr{P}'$ *d'équations respectives* $x-y+z+1=0$ *et* $2x+y-z-1=0$.

1. *Vérifier que ces deux plans ne sont pas parallèles.*
2. *Déterminer une paramétrisation de leur intersection* $\mathscr{D}$.
3. *Donner une équation cartésienne du plan* $\mathscr{Q}$ *passant par* $A=(1,1,0)$ *et perpendiculaire aux deux plans* $\mathscr{P}$ *et* $\mathscr{P}'$.

Solution :

1. *Un vecteur normal à* $\mathscr{P}$ *est* $\overrightarrow{n}\begin{vmatrix}1\\-1\\1\end{vmatrix}$ *et un vecteur normal à* $\mathscr{P}'$ *est* $\overrightarrow{n'}\begin{vmatrix}2\\1\\-1\end{vmatrix}$. *Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc les plans ne sont pas parallèles. Leur intersection est alors une droite* $\mathscr{D}$.
2. $\mathscr{D}$ *est dirigée par le vecteur*
$$\overrightarrow{n}\wedge\overrightarrow{n'}=\begin{vmatrix}1\\-1\\1\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}2\\1\\-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0\\3\\3\end{vmatrix}$$
ou encore par le vecteur $\overrightarrow{u}=\begin{vmatrix}0\\1\\1\end{vmatrix}$. *Un point de* $\mathscr{D}$ *est :* $M\begin{vmatrix}0\\0\\-1\end{vmatrix}$. *On l'obtient à partir du système* $\begin{cases}x-y+z+1 &=0\\2x+y-z-1 &=0\end{cases}$ *en fixant* $y=0$ *et en résolvant le système à deux équations et deux inconnues ainsi obtenu. Une paramétrisation de* $\mathscr{D}$ *est alors :* $\boxed{\begin{cases}x &=0\\y &=t\\z &=-1+t\end{cases},\quad t\in\mathbb{R}}$.

3. *Le plan $\mathscr{Q}$ passant par $A = (1, 1, 0)$ et perpendiculaire aux deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ admet $\overrightarrow{u}$ comme vecteur normal. Son équation est donc de la forme : $y + z + c = 0$. Comme $A \in \mathscr{Q}$, $c = -1$ et une équation de $\mathscr{Q}$ est $\boxed{y + z - 1 = 0}$.*

Références