Probabilité d'obtenir un multiple de cinq en jetant n dés

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

6 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Probabilité d'obtenir un multiple de cinq en jetant*** n ***dés***

On jette n fois un dé équilibré ; quelle est la probabilité que la somme des n faces obtenues soit divisible par 5 ?

Solution :

1. ***première solution :*** *Désignons pour $n = r(5) \in \mathbb{N}$ par $p_n^{(r)}$ la probabilité qu'aprés n tirages la somme des faces soit congrue à r modulo 5. Nous avons bien entendu*

$$p_0^{(0)} = 1 \quad \text{et} \quad p_0^{(1)} = p_0^{(2)} = p_0^{(3)} = p_0^{(4)} = 0$$

et il est facile de vérifier que pour $n \in \mathbb{N}^\star$

$$p_n^{(r)} = \sum_{j=1}^{6} \frac{p_{n-1}^{r-j}}{6}.(\star)$$

Ces formules nous permettent de calculer $p_n^{(r)}$ pour quelques petites valeurs de n pour conjecturer que

$$p_n^{(r)} = \frac{1}{5} + \frac{4}{5.6^n} \quad \text{si} \quad n \equiv 0(5) \quad \text{et} \quad p_n^{(r)} = \frac{1}{5} - \frac{4}{5.6^n} \quad \text{sinon.}$$

Ces conjectures se démontrent alors facilement par récurrence avec $(\star)$.

2. ***seconde solution :*** *On considère la partition suivante de l'ensemble $\mathscr{S} = \{1,2,3,4,5,6\}^n \setminus \{(6,6,\dots,6)\}$: chaque famille sera constitué des suites de la forme*

$$\underbrace{66\dots6}_{k \text{ fois}} \quad XY_1 \dots Y_{n-k-1}$$

où $X \in \{1,2,3,4,5\}$ et $Y_1, \dots, Y_{n-k-1}$ sont fixés. Chaque élément de la partition est donc constituée de 5 suites dont, modulo 5 la somme des chiffres est exactement $0,1,2,3,4$ soit exactement une dont la somme de chiffres est $0(5)$. Ainsi le nombre de suites dont la somme *des chiffres est divisible par 5 est* $\text{card}(\mathscr{S})/5 = (6^n - 1)/5$ *si* n *est pas un multiple de 5 et* $1 + \text{card}(\mathscr{S})/5 = 1 + (6^n - 1)/5$ *sinon (dans ce cas* $(6, 6, \dots, 6)$ *est aussi solution).*

La probabilité cherchée est donc (cas favorables sur cas possibles)

$$\frac{1}{5} + \frac{4}{5.6^n} \quad \textit{si} \quad n \equiv 0(5) \quad \textit{et} \quad \frac{1}{5} - \frac{4}{5.6^n} \quad \textit{sinon.}$$

3. ***troisième solution :*** *Désignons par* p_k *la probabilité que la somme des faces soit égale à* k *et considérons la série génératrice associée*

$$f(z) = \sum_{k \geq 1} p_k x^k = \left(\frac{z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6}{6} \right)^n$$

où la seconde égalité peut être vérifiée facilement par récurrence sur n*. Il s'agit donc de calculer* $\sum_{k \geq 1} p_{5k}$ *; pour cela soit* $\varepsilon = e^{2i\pi/5}$ *la première racine cinquième de l'unité, nous avons*

$$\sum_{k \geq 1} p_{5k} = \frac{f(\varepsilon) + f(\varepsilon^2) + f(\varepsilon^3) + f(\varepsilon^4)}{6}.$$

Il est clair que $f(1) = 1$ *et pour* $j = 1, 2, 3, 4$ $f(\varepsilon^j) = \frac{\varepsilon^{jn}}{6^n}$ *si bien que*

$$f(\varepsilon) + f(\varepsilon^2) + f(\varepsilon^3) + f(\varepsilon^4) = \begin{cases} \dfrac{4}{6^n} & \textit{si} \quad n \equiv 0(5), \\ \dfrac{-1}{6^n} & \textit{sinon.} \end{cases}$$

et finalement

$$\sum_{k \geq 1} p_{5k} = \begin{cases} \dfrac{1}{5} + \dfrac{4}{5.6^n} & \textit{si} \quad n \equiv 0(5), \\ \\ \dfrac{1}{5} - \dfrac{-1}{5.6^n} & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Références