Les dés sont pipés

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

18 avril 2024

Exercice 0.1 ★ Les dés sont pipés

Références ? ? ?

①

Montrer qu'il n'est pas possible de piper deux dés de sorte que la variable aléatoire « somme des deux faces » soit uniformément répartie.

②

Est-il toutefois possible de piper les deux dés et que la variable aléatoire « somme des deux faces » continue à suivre la loi usuelle associée à deux dés « normaux » ?

Solution :

1. *Désignons par X_i, $(i=1,2)$ les variables aléatoires correspondant à la somme des points sur les faces de chacun des deux dés, elles sont **indépendantes** à valeur dans $\{1,\dots,6\}$. Notons $p(X_1=i)=a_i$, $P(X_2=i)=b_i$, $(i=1,\dots 6)$. Supposons donc que X_1+X_2 (à valeur dans $\{2,\dots,12\}$) suive une loi uniforme i.e.*

$$\forall\, i\in\{2,\dots,12\}\ :\ P(X_1+X_2=i)=\frac{1}{11}.$$

La fonction de répartition de X_1+X_2 est

$$F_{X_1+X_2}(t)=\frac{1}{11}\left(t^2+t^3+\cdots+t^{12}\right)$$

et celles des X_i sont

$$F_{X_1}(t)=a_1t+a_2t^2+\cdots+a_6t^6,\quad \text{et}\quad F_{X_2}(t)=b_1t+b_2t^2+\cdots+b_6t^6.$$

Mais X_1 et X_2 sont indépendantes

$$F_{X_1+X_2}(t)=F_{X_1}(t)F_{X_2}(t)(\bigstar)$$

i.e.

$$\forall\, t\in\mathbb{R}:\qquad \frac{1}{11}\left(1+t+t^2+\cdots+t^{10}\right)=(a_1+a_2t+\cdots+a_6t^5)(b_1+b_2t+\cdots+b_6t^5)$$

le coefficient de t^{10} étant $\frac{1}{11}$, nécessairement $a_6 > 0$ et $b_6 > 0$ et par suite $a_1+a_2t+\cdots+a_6t^5$ et $b_1+b_2t+\cdots+b_6t^5$ possèdent chacun une racine réelle comme polynômes de degré impair mais ceci est absurde car $1+t+t^2+\cdots+t^{10}$ est sans racines réelles, contradiction.

2. *Avec deux dés normaux, on a bien entendu*

$$P(X_1+X_2=2)=\frac{1}{36},\quad P(X_1+X_2=3)=\frac{2}{36},\quad P(X_1+X_2=4)=\frac{3}{36},\dots ect\dots P(X_1+X_2=12)=\frac{1}{36}.$$

de sorte que la formule ($\bigstar$) deviens maintenant

$$\begin{aligned}\frac{F_{X_1+X_2}(t)}{t^2} &= \frac{1}{36}\left(1+2t+3t^2+4t^3+5t^4+6t^5+5t^6+4t^7+3t^8+2t^9+t^{10}\right)\\ &= \frac{1}{36}\left(1+t+t^2+t^3+t^4+t^5\right)^2\\ &= \frac{1}{36}\left(\frac{1-t^6}{1-t}\right)^2\\ &= \frac{F_{X_1}(t)F_{X_2}(t)}{t^2}\\ &= (a_1+a_2t+\cdots+a_6t^5)(b_1+b_2t+\cdots+b_6t^5)\end{aligned}$$

les racines du premier polynôme sont les racines sixièmes de l'unité, exepté 1 et toutes avec une multiplicité 2 :

$$\omega, \omega^2, -1, -\omega, -\omega^2$$

(où ω est une racine primitive de l'unité) ainsi les dix racines du polynôme $t^{-2}F_{X_1}(t)F_{X_2}(t)$ sont les dix nombres complexes

$$\omega, \omega^2, -1, -\omega, -\omega^2, \omega, \omega^2, -1, -\omega, -\omega^2.$$

cinq d'entre-eux sont les racines de $a_1+a_2t+\cdots+a_6t^5$ les cinq autres étant celles de $b_1+b_2t+\cdots+b_6t^5$. En choisissant les cinq premières pour le premier polynôme et les cinq autres pour le second on obtient

$$\frac{F_{X_1}(t)}{a_6t} = (t+1)(t-\omega)(t-\omega^2)(t+\omega)(t+\omega^2) == 1+t+t^2+t^3+t^4+t^5$$

on fait de même pour le second dé, soit

$$a_1=a_2=\cdots=a_6=\frac{1}{6}=b_1=b_2=\cdots=b_6$$

i.e. les deux dés ne sont pas pipés. Il ne reste plus qu'à vérifier à la main qu'aucune autre partition des dix racines ne convient. La seule alternative est donc le cas classique de deux dés non pipés.

Remarque : *voici une autre manière pour résoudre la première partie de ce problème, elle est un peu plus simple mais (à mon goût), moins élégante. On conserve les mêmes notations qu'au dessus.*

On a

$$\begin{aligned}
P(X_1+X_2=2) &= a_1b_1 = \frac{1}{11}\\
P(X_1+X_2=12) &= a_6b_6 = \frac{1}{11}\\
P(X_1+X_2=7) &= a_1b_6+a_2b_5+a_3b_4+a_4b_3+a_5b_2+a_6b_1 = \frac{1}{11}
\end{aligned}$$

des deux premières égalités on tire

$$b_1 = \frac{1}{11a_1} \quad b_6 = \frac{1}{11a_6}$$

l'inégalité classique $\dfrac{x^2+y^2}{xy} \geq 2$ *nous donne*

$$\frac{1}{11}\left(\frac{a_1}{a_6}+\frac{a_6}{a_1}\right) \geq \frac{2}{11} > \frac{1}{11}$$

soit, sur le troisième terme

$$\begin{aligned}
P(X_1+X_2=7) = {} & a_1b_6+a_2b_5+a_3b_4+a_4b_3+a_5b_2+a_6b_1\\
= {} & \frac{1}{11}\left(\frac{a_1}{a_6}+\frac{a_6}{a_1}\right)+a_2b_5+a_3b_4+a_4b_3+a_5b_2\\
> {} & \frac{1}{11}+a_2b_5+a_3b_4+a_4b_3+a_5b_2 > \frac{1}{11}
\end{aligned}$$

i.e.

$$P(X_1+X_2=7) > \frac{1}{11}$$

contradiction.

Références