Dénombrement et algèbre linéaire

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

8 février 2023

Exercice 0.1 ★ ***Dénombrement et algèbre linéaire***

[1]

Déterminer le cardinal de $O_n(\mathbb{R}) \cap M_n(\mathbb{Z})$.

Solution : *Soit $A = ((a_{ij})) \in O_n(\mathbb{R}) \cap M_n(\mathbb{Z})$, A étant orthogonale, ses colonnes sont de norme 1*

$$\forall\ 1 \leq j \leq n \quad : \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 = 1$$

mais les coefficients $a_{ij} \in \mathbb{Z}$, donc

$$\forall\ 1 \leq j \leq n,\ \exists!\ \sigma(j) \in \{1, \dots, n\} \text{ tel que } a_{\sigma(j)j} = +1 \text{ ou } -1 \text{ et } \ a_{ij} = 0\ \forall\ i \neq \sigma(j)$$

ainsi, dans chaque colonne (ou ligne) un seul coefficient n'est pas nul et vaut $+$ ou -1. Toujours par orthogonabilité de A :

$$\forall\ i \neq j \quad : \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj} = 0.$$

Supposons que dans la première colonne le k-ième coefficient soit non nul : $a_{k1} \neq 0$, les vecteurs première et seconde colonne étant orthogonaux on a forcément $a_{2k} = 0$ et il ne reste donc que $2(n-1)$ choix possibles pour completer la seconde colonne. De proche en proche le cardinal de $O_n(\mathbb{R}) \cap M_n(\mathbb{Z})$ est $2^n n!$.

Références

[1] Jean-Marie Monier. Multiples ouvrages aux éditions Dunod.