Groupes et probabilités

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

22 février 2024

Exercice 0.1 ★ ***Groupes et probabilités***

Soit G un groupe fini non commutatif. On note $p(G)$ la probabilité pour que deux éléments de G tirés au hasard commutent entre eux. Montrer que $p(G) \leq \frac{5}{8}$ et préciser pour quels groupes cette valeur maximale est atteinte.

Solution : *Soit G un groupe fini non commutatif, notons Z son centre et pour $x \in G$ désignons par G_x l'ensemble des éléments de G commutant avec x. Z et G_x sont deux sous-groupes de G ; Z est lui même un sous groupe de C_x. Le théorème de Lagrange, nous assure de l'existence de trois entiers $m, k_x, l_x \in \mathbb{N}$ vérifant*

$$|G| = m|Z|, \quad |G| = k_x|G_x|, \quad \textit{et} \quad |G_x| = l_x|Z|.$$

soit

$$k_x l_x = m$$

.

- *Si $x \in Z$, alors $G_x = G$, $k_x = 1$ et $l_x = m$.*
- *Sinon, $G_x \neq G$ (car $x \notin Z$) donc $k_x > 1$ et $l_x > 1$.*

Il existe donc $a \in G \setminus Z$ tel que

$$mk_a l_a = m^2 \geq 4.$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
p(G) = \frac{1}{|G|^2} \sum_{x \in G} |G_x| &= \frac{1}{|G|^2} \left(\sum_{x \in Z} |G_x| + \sum_{x \in G \setminus Z} |G_x| \right) \\
&= \frac{1}{|G|^2} \left(|G||Z| + \sum_{x \in G \setminus Z} |G_x| \right) \\
&\leq \frac{1}{|G|^2} \left(|G||Z| + (|G| - |Z|) \frac{|G|}{2} \right) \\
&\leq \frac{|G| + |Z|}{2|G|} \\
&\leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + 1 \right) = \frac{5}{8}.
\end{aligned}$$

Pour le cas d'égalité, $p(G) = \frac{5}{8}$, si, et seulement si $m = 4$. C'est en effet nécessaire vu ce qui précède ; réciproquement, si $m = 4$, on a $|G_x| = \frac{1}{2}|G|$ pour tout $x \in G \setminus Z$ et on obtient l'égalité.

Remarque : *Pour en savoir plus, on peut consulter la rubrique* « questions-réponses » *de la RMS [**?**], 2003/04, tome 2.*

Références