Nombre de matrices symétriques à coefficients dans $\{0,1\}$ et série entières

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

Exercice 0.1 ★ ***Nombre de matrices symétriques à coefficients dans*** $\{0,1\}$ ***et série entières***

(Putnam, 1967).

Soit u_n *le nombre de matrices* $n \times n$*, symétriques à coefficients dans* $\{0,1\}$ *avec exactement un 1 sur chaque ligne (on notera* S_n *cet ensemble). Avec* $u_0 := 1$*, montrer que*

$$u_{n+1} = u_n + nu_{n-1}, \quad \sum_{n\geq 0} \frac{u_n x^n}{n!} = \exp(x) + \frac{x^2}{2} := f(x).$$

Solution : *Il y a une correspondance bijective entre* S_n *et l'ensemble des matrices* $M = ((m_{ij})) \in S_{n+1}$ *telles que* $m_{11} = 1$*. De même si* $i \geq 2$*, il y aussi une correspondance bijective entre* S_{n-1} *et les matrices* $M \in S_{n+1}$ *telles que* $m_{1i} = 1$ *(en effet* M *étant symétrique* $m_{i1} = 1$*, il n'y a donc que des zéros sur les autres coefficients des i-èmes lignes et colonnes : la donnée de* M *correspond donc à celle de la matrice* $(n-1) \times (n-1)$ *déduite de* M *en lui supprimant ses ièmes lignes et colonnes). De ces deux correspondances et puisque* $u_0 = u_1 = 1$ *on a*

$$u_{n+1} = u_n + nu_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Pour la seconde partie, il suffit de remarquer que f *est développable en série entière* $\sum_n v_n x^n$ *sur* $\mathbb{R}$*, puis que les coefficients* v_n *satisfont à la même relation de récurrence que les* u_n *pour conclure facilement.*

Références