« Probabilité » que deux entiers soient premiers entre-eux

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***« Probabilité » que deux entiers soient premiers entre-eux***

On se propose de démontrer que la probabilité r_n que deux entiers pris au hasard dans $\{1,\dots,n\}$ soient premiers entre-eux vérifie

$$r_n = \frac{1}{n^2}\sum_{d\geq 1}\mu(d)E\left(\frac{n}{d}\right)^2 \quad \textit{et} \quad \lim_n r_n = \frac{6}{\pi^2}$$

où l'application (c'est la **« fonction de möebius »** *) $\mu\ :\ \mathbb{N}^\star \to\ \{-1,0,1\}$ est définie par :*

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \textit{si } n=1, \\ 0 & \textit{si } n \textit{ possède au moins un facteur carré}, \\ (-1)^k & \textit{si } n = p_1\dots p_k \textit{où les } p_i \textit{ sont des nombres premiers distincts.}\end{cases}$$

Soient $p_1,\dots,p_k$ les nombres premiers $\leq n$ et pour $1\leq i\leq k$:

$$V_i := \left\{(a,b)\in\{1,\dots,n\}^2\ :\ p_i \textit{ divise } a \textit{ et } b\right\}.$$

①

Montrer que

$$\begin{aligned}\textit{card}\left(\bigcup_{i=1}^k V_i\right) &= \sum_{\emptyset\neq I\subset\{1,\dots,n\}}(-1)^{1+\text{card}(I)}\textit{card}\left(\bigcap_{i\in I}V_i\right)\\ &= -\sum_{\emptyset\neq I\subset\{1,\dots,n\}}(-1)^{\text{card}(I)}E\left(\frac{n}{\prod_{i\in I}p_i}\right)^2\\ &= -\sum_{d=2}^n\mu(d)E\left(\frac{n}{d}\right)^2\end{aligned}$$

Et en déduire r_n.

②

Montrer que $\left|r_n - \sum_{d=1}^n\frac{\mu(d)}{d^2}\right| = 0\left(\frac{\log(n)}{n}\right).$

③

Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}\sum_{d\geq 1}\frac{\mu(d)}{d^2}=\sum_{i\geq 1}\sum_{l \text{ divise } i}\frac{\mu(l)}{i^2}=1.$

④

Conclure.

Solution :

1. *Soit donc $n\geq 1$ et désignons par $p_1,p_2,\dots,p_k$ les nombres premiers inférieurs ou égaux à n. Avec la formule du crible*

$$\mathrm{card}\left(\bigcup_{i=1}^{k}V_i\right)=\sum_{\emptyset\neq I\subset\{1,\dots,n\}}(-1)^{1+\mathrm{card}(I)}\mathrm{card}\left(\bigcap_{i\in I}V_i\right)$$

soit $I\subset\{1,\dots,n\}$ une partie non vide, le nombre de multiples de $\prod_{i\in I}p_i$ dans $\{1,\dots,n\}$ est $E\left(\frac{n}{\prod_{i\in I}p_i}\right)$ soit

$$\mathrm{card}\left(\bigcap_{i\in I}V_i\right)=E\left(\frac{n}{\prod_{i\in I}p_i}\right)^2$$

si bien qu'avec la formule du crible le nombre de couples d'entiers inférieurs ou égaux à n est

$$\begin{aligned}\mathrm{card}\left(\bigcup_{i=1}^{k}V_i\right)&=\sum_{\emptyset\neq I\subset\{1,\dots,n\}}(-1)^{1+\mathrm{card}(I)}\mathrm{card}\left(\bigcap_{i\in I}V_i\right)\\&=\sum_{\emptyset\neq I\subset\{1,\dots,n\}}(-1)^{1+\mathrm{card}(I)}E\left(\frac{n}{\prod_{i\in I}p_i}\right)^2,\qquad(\bigstar)\end{aligned}$$

il faut maintenant remarquer que puisque $\mu\left(\prod_{i\in I}p_i\right)=(-1)^{\mathrm{card}(I)}$ et $\mu(l)=0$ pour tout autre entier $l\in\{2,\dots,n\}$ (ces derniers possèdent un facteur carré) :

$$\sum_{\emptyset\neq I\subset\{1,\dots,n\}}(-1)^{1+\mathrm{card}(I)}E\left(\frac{n}{\prod_{i\in I}p_i}\right)^2=-\sum_{d=2}^{n}\mu(d)E\left(\frac{n}{d}\right)^2$$

soit finalement

$$\mathrm{card}\left(\bigcup_{i=1}^{k}V_i\right)=-\sum_{d=2}^{n}\mu(d)E\left(\frac{n}{d}\right)^2.$$

Ainsi, le nombre de couples $(a,b)\in\{1,2,\dots,n\}^2$ premiers entre-eux est

$$n^2-\mathrm{card}\left(\bigcup_{i=1}^{k}V_i\right)=n^2+\sum_{d=2}^{n}\mu(d)E\left(\frac{n}{d}\right)^2=\sum_{d=1}^{n}\mu(d)E\left(\frac{n}{d}\right)^2$$

et la probabilité cherchée est

$$r_n=\frac{\text{cas favorables}}{\text{cas possibles}}=\frac{1}{n^2}\sum_{d=1}^{n}\mu(d)E\left(\frac{n}{d}\right)^2.$$

2. *Commencons par remarquer que pour* $1 \leq d \leq n$

$$\left(\frac{n}{d}\right)^2 \geq E\left(\frac{n}{d}\right)^2 > \left(\frac{n}{d}-1\right)^2$$

qui implique

$$0 \geq \frac{1}{n^2}E\left(\frac{n}{d}\right)^2 - \frac{1}{d^2} \geq \frac{1}{n^2} - \frac{2}{nd}$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
\left| r_n - \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d^2} \right| &= \left| \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{n^2} E\left(\frac{n}{d}\right)^2 - \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d^2} \right| \\
&= \left| \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \left[\frac{1}{n^2} E\left(\frac{n}{d}\right)^2 - \frac{1}{d^2} \right] \right| \\
&\leq \sum_{d=1}^{n} |\mu(d)| \left(\frac{2}{nd} - \frac{1}{n^2} \right) \\
&\leq \sum_{d=1}^{n} \left(\frac{2}{nd} - \frac{1}{n^2} \right) \\
&\leq \frac{1}{n} + \frac{2}{n} \sum_{d=1}^{n} \frac{1}{d} = \frac{1}{n} + O\left(\frac{\log n}{n}\right) = O\left(\frac{\log n}{n}\right).
\end{aligned}$$

3. &
4. *La série* $\sum_d \mu(d)/d^2$ *étant convergente*

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2}, (1)$$

d'un autre coté, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
\frac{\pi^2}{6} \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \right) \left(\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} \right) \\
&= \sum_{(i,d)\in\mathbb{N}^2} \frac{\mu(d)}{i^2 d^2} = \sum_{i\geq 1} \frac{1}{i^2} \sum_{l/i} \mu(l) := \sum_{i \geq 1} \frac{1}{i^2} S(i)
\end{aligned}$$

où les deux avant dernières égalités sont justifiées par l'absolue convergence des deux premieres séries (on peut alors « sommer par paquets »). il reste donc à estimer $S(i)$ *pour* $i \geq 1$. $S(1) = 1$ *et pour* $i \geq 2$ *soit* $i = q_1^{\alpha_1} \dots q_N^{\alpha_N}$ *la décomposition de* i *en facteurs premiers ; un diviseur* l *de* i *s'écrit donc sous la forme* $l = q_1^{\beta_1} \dots q_N^{\beta_N}$ *avec* $0 \leq \beta_j \leq \alpha_j$. *Mais* $\mu(l) \neq 0$ *signifie que* $\beta_j = 0$ *ou* 1 *et dans ce cas* $\mu(l) = (-1)^s$ *où* $s = card\{1 \leq j \leq N \ : \ \beta_j = 1\}$. *Il existe donc une bijection entre l'ensemble des diviseurs* l *de* i *tels que* $\mu(l) = (-1)^s$ *et* *l'ensemble des N-uplets $(\beta_1, \ldots, \beta_N) \in \{0,1\}^N$ avec exactement s composantes égales à 1 et ce dernier est bien entendu de cardinal C_N^s si bien que*

$$S(i) = \sum_{l/i} \mu(l) = \sum_{s=0}^{N} \sum_{l/i \& \mu(l)=(-1)^s} \mu(l) = \sum_{s=0}^{N} C_N^s (-1)^s = (1-1)^N = 0.$$

en résumé

$$S(i) = \begin{cases} 1 & si \quad i = 1 \\ 0 & si \quad i \geq 2. \end{cases}$$

soit

$$\frac{\pi^2}{6} \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} = 1$$

et enfin

$$\lim_{n \to \infty} r_n = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} = \frac{6}{\pi^2}.$$

Références