

Distribution de deux points sur un segment (1)

Patrice Lassère¹

¹, Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ Distribution de deux points sur un segment (1)

(PUTNAM 1993).

Si x et y sont choisis au hasard dans $[0, 1]$ (avec une densité uniforme), quelle est la probabilité que l'entier le plus proche de $\frac{x}{y}$ soit pair ?

Solution :

25025

L'entier le plus proche de $\frac{x}{y}$ est zéro si $2x < y$ et (pour $n \geq 1$) vaut $2n$ si $\frac{2x}{4n+1} < y < \frac{2x}{4n-1}$ (on ignore bien entendu les éventuelles extrémités de ces intervalles qui sont de probabilités nulles). La probabilité cherchée est donc l'aire grisée de la figure ci-contre, soit :

$$\bigcup_{n \geq 1} \left\{ (x, y) \in [0, 1]^2 : \frac{2x}{4n+1} < y < \frac{2x}{4n-1} \right\}$$

soit

$$p = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) + \dots$$

Mais comme

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

on trouve $p = \frac{5}{4} - \frac{\pi}{4}$

Références