Autour du « nombre de dérangements »

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Autour du « nombre de dérangements »***
[1]

On désigne par D_n ($D_0 = 1$ par convention) le nombre de permutations de $\mathscr{S}_n = \{1, 2, \dots, n\}$ n'ayant pas de points fixes (i.e. le nombre de dérangements)

1. ***Approche classique :*** *Montrer que*

$$n! = \sum_{k=0}^{n} C_n^k D_k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k D_{n-k}. (\star)$$

Calculer $\sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_n^k C_{n-k}^{p-k}$ *pour* $0 \leq p \leq n$ *et en déduire que*

$$D_n = n! \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right). (\star)$$

2. ***Avec les séries entières :*** *Calculer* $\sum_{k=0}^{n} C_n^k D_k$. *Minorer la rayon de convergence de la série génératrice de* $(D_n)_n$: $D(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{D_k z^k}{k!}$ *et donner une expression de* $D(z)$. *Retrouver la valeur de* D_n *et montrer que* D_k *est la partie entière de* $\frac{k!}{e} + \frac{1}{2}$.
3. ***Troisième approche :*** *Montrer que pour tout* $n \geq 2$: $D_{n+1} = n(D_n + D_{n-1})$, *en déduire que* $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$ *et retrouver la valeur de* D_n.

Références

[1] S. Francinou, H. Gianella, and H. Nicolas. Exercices de Mathématiques (oraux X-ENS) : algèbre 1. Cassini, 2001.