Un peu de dénombrement autour d'une série entière

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

6 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Un peu de dénombrement autour d'une série entière***

Est-ce que le coefficient de x^{45} dans le développement en série entière à l'origine de

$$(1-x)^{-1}(1-x^3)^{-1}(1-x^9)^{-1}(1-x^{15})^{-1}$$

vaut 88 ?

Solution : *Les pôles de cette fraction rationnelle sont des racines de l'unité : elle est donc développable en série entière à l'origine (et le rayon de convergence vaut 1). On a donc*

$$\begin{aligned}(1-x)^{-1}(1-x^3)^{-1}(1-x^9)^{-1}(1-x^{15})^{-1} &= \left(\sum_{a=0}^{+\infty} x^a\right)\left(\sum_{b=0}^{+\infty} x^{3b}\right)\left(\sum_{c=0}^{+\infty} x^{9c}\right)\left(\sum_{d=0}^{+\infty} x^{15d}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k,\end{aligned}$$

où u_k désigne bien entendu le nombre de 4-uplets $(a,b,c,d)\in\mathbb{N}^4$ vérifiant $a+3b+9c+15d=k$. Notre mission est donc de dénombrer les 4-uplets $(a,b,c,d)\in\mathbb{N}^4$ vérifiant

$$a+3b+9c+15d=45.(\star)$$

$(\star)$ assure déja que a est un multiple de 3, disons $a=3\alpha,\ \alpha\in\mathbb{N}$, soit

$$\alpha+b+3c+5d=15.$$

- *$d=3$ implique $\alpha=b=c=0$:* ***un cas****.*
- *$d=2$ implique $c=1$ (alors trois possibilités : $(\alpha,b)\in\{(0,2),(2,0),(1,1)\}$) ou $c=0$ (alors $\alpha+b=5$ soit 6 possibilités) :* ***neuf cas****.*
- *$d=1$ implique $c=3,2,1$ ou 0 soit $2,5,8$ et 11 possibilités :* ***26 cas****.*
- *$d=0$ implique $c=5,4,3,2,1$ ou 0, soit $1,4,7,10,13$ et 16 possibilités :* ***51 cas****.*

L'équation $(\star)$ a donc $51+26+9+1=87$ solutions : la réponse à la question est donc non.

Références