Deux inégalités

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

22 février 2024

Exercice 0.1 ★ ***Deux inégalités***

[1].

1. *Soient* $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ *des réels strictement positifs, montrer que*

$$\max\left\{\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n}{b_n},\ \frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\cdots+\frac{b_n}{a_n}\right\}\geq n.$$

2. *Soient* $a_1, \dots, a_n$ *des réels* ≥ 1*, montrer que*

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)\geq\frac{2^n}{n+1}(1+a_1+a_2+\cdots+a_n).$$

Solution :

1. - ***Première solution :*** *Avec l'inégalité arithmético-géométrique*[1] *on a*

$$A:=\left(\frac{a_1a_2\dots a_n}{b_1b_2\dots b_n}\right)^{1/n}\leq\frac{1}{n}\left(\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}\right)$$

et

$$A^{-1}=\left(\frac{b_1b_2\dots b_n}{a_1a_2\dots a_n}\right)^{1/n}\leq\frac{1}{n}\left(\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\cdots+\frac{b_n}{a_n}\right).$$

Comme l'un des réels A *et* A^{-1} *est nécessairement supérieur ou égal à 1 le résultat suit.*

- ***Seconde solution :*** *Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz :*

$$\left(\sum_{i=1}^n\frac{a_i}{b_i}\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^n\frac{b_i}{a_i}\right)\geq n^2,$$

par conséquent dans le terme de gauche, l'un des deux facteurs se doit d'être supérieur ou égal à n*.*

- ***Troisième solution :*** *Par convexité sur* $\mathbb{R}_+^\star$ *de l'application* $f \ : \ x \mapsto f(x) = x^{-1}$ *nous avons*

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i}\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{a_i}{b_i}\right)$$

soit

$$n^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i}\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i}\right)$$

et on retrouve l'inégalité de la seconde solution.

2. - ***Première solution :*** *Par récurrence sur* $n \geq 1$ *: c'est clair pour* $n = 1$ *; supposons la formule valide jusqu'au rang* n*, alors*

$$\begin{aligned}(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)(1+a_{n+1}) &\geq \frac{2^n}{n+1}(1+a_1+a_2+\dots+a_n)(1+a_{n+1}) \\ &:= \frac{2^n}{n+1}(1+a)(1+b),\end{aligned}$$

(avec $a = a_1 + a_2 + \dots + a_n, b = a_{n+1}$*) et il ne reste plus qu'à montrer*

$$\frac{2^n}{n+1}(1+a)(1+b) \geq \frac{2^{n+1}}{n+2}(1+a+b).$$

Cette inégalité équivaut à

$$(n+2)(1+a)(1+b) \geq 2(n+1)(1+a+b).$$

Mais

$$(n+2)(1+a)(1+b) - 2(n+1)(1+a+b) = 2(ab-n) + n(a-1)(b-1),$$

et les deux derniers termes sont positifs car $a = a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n$ *et* $b = a_{n+1} \geq 1$*.*

- ***Seconde solution :*** *L'inégalité proposée équivaut à*

$$\left(\frac{1+a_1}{2}\right)\left(\frac{1+a_2}{2}\right)\dots\left(\frac{1+a_n}{2}\right) \geq \frac{1+a_1+a_2+\dots+a_n}{n+1}$$

ou encore

$$(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) \geq 1 + \frac{2}{n+1}(x_1+x_2+\dots+x_n)$$

en posant $x_i = (a_i-1)/2, \ (1 \leq i \leq n)$*. Mais par positivité des* x_i

$$\begin{aligned}(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) &\geq 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_n \\ &\geq 1 + \frac{2}{n+1}(x_1+x_2+\dots+x_n)\end{aligned}$$

CQFD.

Références

[1] J. Edward and S.Klamkin W.O.J Moser J.Barbeau, S. Murray. Five Hundred Mathematical Challenges. M.A.A., 1995.