Même périmètre et même aire

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

Exercice 0.1 ★ ***Même périmètre et même aire***

Putnam (2005), [1] 2005/8.

Déterminer tous les nombres réels $a > 0$ pour lequels il existe il existe une fonction positive $f \in \mathscr{C}^0([0, a])$ telle que le domaine

$$\mathscr{D} = \{(x, y) \ : \ 0 \leq x \leq a, \ 0 \leq f(x) \leq f(x)\}$$

admette une aire et un périmètre de même valeur.

Solution : *f continue sur le compact $[0, a]$ atteint son maximum en un point $c \in [0, a]$ et il faut remarquer que $f(c) > 0$ (sinon $\mathscr{D}$ aurait une aire nulle mais un perimètre $a > 0$...). Notons k l'aire (ou le périmètre) de $\mathscr{D}$. $\mathscr{D}$ est visiblement inclu dans le rectangle $[0, a] \times [0, f(c)]$: son aire est donc inférieure ou égale à celle du rectangle $af(c)$. D'un autre coté, $k > 2f(c)$ car $2f(c)$ est strictement plus petit que la distance de $(0, 0)$ à $(c, f(c))$ plus la distance de $(c, f(c))$ à $(a, 0)$ distance strictement plus petite que le périmètre k de $\mathscr{D}$. Nous avons donc $2f(c) < k \leq af(c)$; en particulier, ceci impose $a > 2$.*

Réciproquement, pour $a > 2$ le domaine $\mathscr{D}$ associé à l'application constante $f(x) = 2a/(a-2)$ est un rectangle d'aire $2a^2/(a-2)$ et de périmètre

$$2a + 2\frac{2a}{a-2} = \frac{2a^2}{a-2}.$$

Donc, tout nombre réel $a > 2$ convient.

Références

[1] American Mathematical Monthly. M.A.A., maa@?????.fr.