

Une suite associée à un polygône

Patrice Lassère¹

¹, Université Paul Sabatier, Toulouse

8 février 2023

Exercice 0.1 ★ Une suite associée à un polygône

S_n désigne la somme des longueurs de toutes les faces et de toutes les diagonales d'un polygone régulier inscrit dans le cercle unité. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^2} = \frac{2}{\pi}.$$

Solution : Un petit calcul nous donne

$$S_n = n \sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right),$$

et avec l'identité $2 \sin(a) \sin(b) = \cos(a-b) - \cos(a+b)$, on a

$$2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \cos(0) + \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{n}\right) = 2\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)$$

si bien que

$$\frac{S_n}{n^2} = \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

et le résultat suit

Références