# Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

28 décembre 2021

***Exercice 0.1*** ★ ***Pas de titre***

*Pour chacun des plans $\mathcal{P}$ suivant calculer une équation cartésienne et une équation paramétrée :*

1. *Le plan $\mathcal{P}$ passant par $A\,(1,0,1)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n} = (1,-1,2)$.*
2. *Le plan $\mathcal{P}$ passant par $A\,(0,1,1)$ et engendré par $\overrightarrow{u} = (1,-1,0)$ et $\overrightarrow{v} = (0,0,2)$.*
3. *Le plan $\mathcal{P}$ passant par $A\,(1,-1,0)$ et parallèle au plan $\mathcal{Q}\ : x - 2z + 1 = 0$.*
4. *Le plan $\mathcal{P}$ passant par $A\,(1,-1,1)$ et perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}\ : \begin{cases} 2x - y + 1 &= 0 \\ x - y + z - 2 &= 0 \end{cases}$.*
5. *Le plan $\mathcal{P}$ passant par les points $A\,(1,0,1)$, $B\,(0,1,-1)$ et $C\,(2,1,0)$.*
6. *Le plan $\mathcal{P}$ contenant les droites $\mathcal{D}\ : \begin{cases} x - y + 1 &= 0 \\ y - z - 2 &= 0 \end{cases}$ et $\mathcal{D}'\ : \begin{cases} x &= -3 + t \\ y &= 2 - t \\ z &= 2 - 2t \end{cases}$.*
7. *Le plan $\mathcal{P}$ passant par $A\,(1,0,0)$ et perpendiculaire aux plans $\mathcal{Q}\ : x - 2y + z - 1 = 0$ et $\mathcal{Q}'\ : y - 2z + 1 = 0$.*
8. *Le plan $\mathcal{P}$ passant par les points $A\,(1,0,-2)$ et $B\,(0,-1,1)$ et perpendiculaire au plan $\mathcal{Q}\ : x - y + z = 1$.*

***Solution :***

1. *Une équation de $\mathcal{P}$ est de la forme $x - y + 2z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$. Mais comme $A \in \mathcal{P}$, $d = -3$ et donc $\mathcal{P}\ : x - y + 2z - 3 = 0$. Pour trouver une équation paramétrée de $\mathcal{P}$, il nous faut connaître deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ qui engendrent $\mathcal{P}$. Il suffit de prendre deux vecteurs non colinéaires et orthogonaux à $\overrightarrow{n}$. C'est le cas par exemple de $\overrightarrow{u} = (1,1,0)$ et $\overrightarrow{v} = (2,0,-1)$.*
   *Donc $\mathcal{P}\ : \begin{cases} x &= 1 + s + 2t \\ y &= s \\ z &= 1 - t \end{cases}\ ;\ s,t \in \mathbb{R}$.*

2. *Comme $\mathcal{P}$ est engendré par* $\overrightarrow{u} = (1, -1, 0)$ *et* $\overrightarrow{v} = (0, 0, 2)$, *il admet* $\overrightarrow{n}' = (-2, -2, 0)$ *ou encore* $\overrightarrow{n} = (1, 1, 0)$ *comme vecteur normal. Son équation cartésienne est donc de la forme* $x + y + d = 0$ *avec* $d \in \mathbb{R}$. *Comme* $A \in \mathcal{P}$, $d = -1$ *et* $\mathcal{P} : x + y - 1 = 0$. *On trouve facilement une équation paramétrée* $\mathcal{P} : \begin{cases} x &= s \\ y &= 1 - s \\ z &= 1 + 2t \end{cases} ; \ s, t \in \mathbb{R}.$
3. *Comme le plan* $\mathcal{P}$ *est parallèle au plan* $\mathcal{Q} : x - 2z + 1 = 0$ *il admet* $\overrightarrow{n} = (1, 0, -2)$ *comme vecteur normal. Son équation est donc de la forme* $x - 2z + d = 0$ *avec* $d \in \mathbb{R}$. *On utilise les coordonnées de* $A$ *pour calculer* $d = -1$. *Donc* $\mathcal{P} : x - 2z - 1 = 0$. *Pour déterminer une équation paramétrique de* $\mathcal{P}$, *il nous faut connaître deux vecteurs* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *engendrant* $\mathcal{P}$. *On peut procéder comme dans la première question. On peut aussi chercher ces vecteurs dans le plan vectoriel* $P : x - 2z = 0$. *On choisit par exemple* $\overrightarrow{u} = (2, 0, 1)$ *et* $\overrightarrow{v} = (0, 1, 0)$. *Il vient alors* $\mathcal{P} : \begin{cases} x &= 1 + 2t \\ y &= -1 + s \\ z &= t \end{cases} ; \ s, t \in \mathbb{R}.$
4. *Un vecteur directeur à* $\mathcal{D}$ *est donné par* $(2, -1, 0) \wedge (1, -1, 1) = (-1, -2, -1)$ *et ce vecteur est normal à* $\mathcal{P}$. *On termine alors comme dans la première question et une équation de* $\mathcal{P}$ *est* $x + 2y + z = 0$. *On cherche alors deux vecteur engendrant ce plan. On peut prendre* $\overrightarrow{u} = (1, -1, 1)$ *et* $\overrightarrow{v} = (2, -1, 0)$ *et une équation paramétrée de* $\mathcal{P}$ *est* $\begin{cases} x &= 1 + s + 2t \\ y &= -1 - s - t \\ z &= 1 + ss \end{cases} ; \ s, t \in \mathbb{R}.$
5. *Les vecteurs* $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, -2)$ *et* $\overrightarrow{AC} = (1, 1, -1)$ *ne sont pas colinéaires et ils engendrent* $\mathcal{P}$. *Un vecteur normal au plan est donc* $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (1, -3, -2)$. *On termine alors comme dans la première question et on a* $\mathcal{P} : x - 3y - 2z + 1 = 0$. *Une équation paramétrée est* $\mathcal{P} : \begin{cases} x &= 1 - s + t \\ y &= s + t \\ z &= 1 - 2s - t \end{cases} ; \ s, t \in \mathbb{R}.$
6. *Comme le système :*
$$\begin{cases} x - y + 1 &= 0 \\ y - z - 2 &= 0 \\ x &= -3 + t \\ y &= 2 - t \\ z &= 2 - 2t \end{cases}$$
*admet* $(-1, 0, -2)$ *comme solution, les deux droites sont sécantes en le point* $A\,(-1, 0, -2)$ *et elles définissent bien un plan. Un vecteur directeur de* $\mathcal{D}$ *est* $\overrightarrow{u} = (1, -1, 0) \wedge (0, 1, -1) = (1, 1, 1)$. *On lit sur l'équation paramétrée de* $\mathcal{D}'$ *un vecteur directeur de* $\mathcal{D}'$ *qui est* $\overrightarrow{v} = (1, -1, -2)$. *Donc un vecteur normal à* $\mathcal{P}$ *est* $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = (-1, 3, -2)$ *et en utilisant les coordonnées de* $A$, *on trouve que* $\mathcal{P} : -x + 3y - 2z - 5 = 0$. *Comme les vecteurs* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *engendrent* $\mathcal{P}$, *on a* $\mathcal{P} : \begin{cases} x &= -1 + s + t \\ y &= s - t \\ z &= -2 + s - 2t \end{cases} ; \ t \in \mathbb{R}$

7. *Les plans* $\mathcal{Q}\ : x-2y+z-1=0$ *et* $\mathcal{Q}'\ : y-2z+1=0$ *ne sont pas parallèles et s'intersectent suivant la droite* $\mathcal{D}\ : \begin{cases} x-2y+z-1 & =0 \\ y-2z+1 & =0 \end{cases}$. *Cette droite est encore perpendiculaire à* $\mathcal{P}$ *et un vecteur directeur pour cette droite donné par* $(1,-2,1)\wedge(0,1,-2)=(0,2,1)$ *est normal à* $\mathcal{P}$. *On en déduit que* $\mathcal{P}\ : 2y+z=0$. *Par ailleurs, tout vecteur normal à* $\mathcal{Q}$ *ou à* $\mathcal{Q}'$ *est élément du plan vectoriel associé à* $\mathcal{P}$ *donc* $\mathcal{P}$ *est le plan passant par* $A$ *et engendré par* $(1,-2,1)$ *et* $(0,1,-2)$. *On en déduit une équation paramétrée :* $\mathcal{P}\ : \begin{cases} x & =1+s \\ y & =-2s+t\ ;\ t\in\mathbb{R} \\ z & =s-2t \end{cases}$

8. *Le vecteur* $\overrightarrow{n}=(1,-1,1)$ *normal à* $\mathcal{Q}\ : x-y+z=1$ *est élément du plan vectoriel associé à* $\mathcal{P}$. *Le vecteur* $\overrightarrow{AB}=(-1,-1,3)$ *est aussi élément de ce plan vectoriel et donc* $\mathcal{P}$ *est le plan passant par* $A$ *et engendré par* $\overrightarrow{n}$ *et* $\overrightarrow{AB}$. *En particulier,* $\overrightarrow{n}\wedge\overrightarrow{AB}=(-2,-4,-2)$ *est normal à* $\mathcal{P}$. *Une équation cartésienne de* $\mathcal{P}$ *est donc* $x+2y+z+=0$. *Une équation paramétrée est*

$$\mathcal{P}\ : \begin{cases} x & =1+s-t \\ y & =-s-t \qquad ;\ t\in\mathbb{R}. \\ z & =-2+s+3t \end{cases}$$

## Références