Coniques : le théorème de Joachimsthal

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Coniques : le théorème de Joachimsthal***

Une ellipse centrée $\mathscr{E}$ rencontre un cercle $\mathscr{C}$ (distinct de l'ellipse) en 4 points d'arguments respectifs $\theta_1, \dots, \theta_4$. Montrer que $\theta_1 + \cdots + \theta_4 \equiv 0(2\pi)$.

Solution : *L'ellipse est paramétrée par* $\begin{cases} x = a\cos(\theta) \\ y = b\sin(\theta) \end{cases}$ *et soit $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0$ l'équation de $\mathscr{C}$. Ainsi*

$$\begin{aligned} M_\theta = \begin{pmatrix} a\cos(\theta) \\ b\sin(\theta) \end{pmatrix} \in \mathscr{E} \cap \mathscr{C} &\iff a^2\cos^2(\theta) + b^2\sin^2(\theta) - 2\alpha a\cos(\theta) - 2\beta b\sin(\theta) + \gamma = 0 \\ &\iff Q(e^{i\theta}) := e^{4i\theta}\left(\frac{a^2 - b^2}{4}\right) + e^{3i\theta}\left(ib\beta - a\alpha\right) + e^{2i\theta}\left(\gamma + \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}\right) \\ &\qquad - e^{i\theta}\left(a\alpha + b\beta\right) + \frac{a^2 - b^2}{4 = 0,} \end{aligned}$$

en d'autres termes, $M_\theta \in \mathscr{E} \cap \mathscr{C} \iff Q(e^{i\theta}) = 0$, et à nos quatre points d'intersection correspondent quatre racines $e^{i\theta_k}$, $1 \leq k \leq 4$ du polynôme Q. Or, les coefficients dominant et constant de Q sont égaux : le produit de ses racines vaut 1 i.e.

$$1 = e^{i\theta_1} \dots e^{i\theta_4} = e^{i(\theta_1 + \cdots + \theta_4)} \Longrightarrow \theta_1 + \cdots + \theta_4 \equiv 0(2\pi)$$

Remarques : *- il s'agit du théorème de Joachimsthal.*

- Il existe surement une explication géométrique claire de ce phénomène, cette démonstration ne la met pas en valeur, une autre serait la bienvenue.

Références