Inégalités dans un triangle (2)

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★ ***Inégalités dans un triangle (2)***

`http://www.les-mathematiques.net`

Soit ABC un triangle propre du plan affine euclidien et $\mathscr{S}$ son aire. Établir l'inégalité

$$a^2+b^2+c^2 \geq (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2+4\mathscr{S}\sqrt{3} \quad \textit{(Hadwiger-Finsler (1937))}$$

Cas d'égalité ?

Solution : *Désignons par p le demi-périmètre du triangle ($2p=a+b+c$) et posons $x=p-a$, $y=p-b$, $z=p-c$, on vérifie alors facilement que*

$$\begin{cases} a^2-(b-c)^2 & =(a-b+c)(a+b-c)=4yz \\ b^2-(c-a)^2 & =(b-c+a)(b+c-a)=4xz \\ c^2-(b-a)^2 & =(c-a+b)(c+a-b)=4xy \end{cases}$$

si bien que l'inéquation demandée est équivalente à

$$xy+xz+zy \geq \mathscr{S}\sqrt{3}(\bigstar)$$

en élevant au carré et en utilisant la formule de Héron

$$\mathscr{S}^2=(x+y+z)xyz$$

on est amené à vérifier

$$(xy+xz+yz)^2 \geq 3(x+y+z)xyz$$

soit, après développement

$$(\bigstar) \quad \Longleftrightarrow \quad x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2 \geq x^2yz+xy^2z+xyz^2$$

pour vérifier cette dernière inégalité il suffit d'appliquer celle de Cauchy-Schwarz aux vecteurs $u=(xy,yz,zx)$ et $v=(yz,zx,xy)$, en effet

$$\begin{aligned} |\langle u,v\rangle| \le \|u\|\,\|v\| &\iff \langle u,v\rangle^2 \le \|u\|^2\,\|v\|^2 \\ &\iff x^2yz + xy^2z + xyz^2 \le x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 \end{aligned}$$

Et par Cauchy-Schwarz (cas d'égalité), l'égalité a lieu si et seulement si les vecteurs u et v sont colinéaires i.e. $x = y = z$ configuration qui correspond à un triangle ABC équilatéral.

Références