Inégalités dans un triangle (1)

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Inégalités dans un triangle (1)***

R. Honsberger « Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry », MAA 1995 ; voir aussi `http://www.les-mathematiques.net`

Soit ABC un triangle propre du plan affine euclidien et trois points D, E, F respectivement sur $[BC], [CA]$ et $[AB]$ tels que $(AD), (BE)$ et (CF) soient sécantes en un point P intérieur au triangle ABC. Montrer que

$$6 \leq \frac{AP}{PD} + \frac{BP}{PE} + \frac{CP}{PF} \quad \& \quad 8 \leq \frac{AP}{PD}\frac{BP}{PE}\frac{CP}{PF}.$$

Solution :

1. *Posons $a = \frac{AP}{PD}, b = \frac{BP}{PE}, c = \frac{CP}{PF}$, P est alors le barycentre de*

$$\begin{cases} (A,1) & \text{et} & (D,a) \\ (B,1) & \text{et} & (E,b) \\ (C,1) & \text{et} & (F,c) \end{cases}$$

ou bien, x, y, z désignant les coordonnées barycentriques de P dans le repère (A, B, C) :

$$\begin{cases} P & \text{est le barycentre de} & (A,x) & \text{et} & (D, y+z) \\ P & \text{est le barycentre de} & (B,y) & \text{et} & (E, z+x) \\ P & \text{est le barycentre de} & (C,z) & \text{et} & (F, x+y) \end{cases}$$

avec

$$a = \frac{y+z}{x}, b = \frac{x+z}{y}, c = \frac{x+y}{z}$$

si bien que

$$a+b+c = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y}$$

et de l'inégalité classique $u + \frac{1}{u} \geq 2$, $(\forall\, u > 0)$, *résulte la première inégalité à établir à savoir :*

$$a + b + c \geq 6.$$

2. *Pour la seconde, on utilise l'inégalité* $x + y \geq 2\sqrt{xy}$, $(\forall\, x, y \geq 0)$ *:*

$$\begin{aligned} abc &= \frac{y+z}{x}\frac{x+z}{y}\frac{x+y}{z} \\ &\geq 8\frac{\sqrt{yz \times xz \times xy}}{xyz} = 8. \end{aligned}$$

Références