Sur la longueur de l'intersection entre une parabole et un disque

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

Exercice 0.1 ★ ***Sur la longueur de l'intersection entre une parabole et un disque***

(Putnam, 2001).

Une parabole intersecte un disque de rayon 1. Est-il possible que la longueur de l'arc de parabole inscrit dans le disque soit supérieure ou égale à 4 ?

Solution : *Sans perdre de généralité (quitte à faire une translation), on peut prendre comme cercle celui d'équation* $(\mathscr{C})\ :\ x^2+(y-1)^2=1$ *et comme parabole, celle d'équation* $(\mathscr{P}_k)\ :\ y=kx^2$ *(si la parabole n'est pas tangente au cercle, on imagine bien qu'en « l'enfoncant » un peu plus, la longueur de l'arc inscrit ne peut qu'augmenter).* $(\mathscr{P}_k)$ *est alors tangente à* $(\mathscr{C})$ *en* $(0,0)$ *et pour* $k>\frac{1}{2}$*, l'intersecte en les deux points*

$$\left(\pm\frac{\sqrt{2k-1}}{k},\frac{2k-1}{k}\right).$$

La longueur d'arc inscrite dans le disque est donc

$$L(k)=2\int_0^{\frac{\sqrt{2k-1}}{k}}\sqrt{1+4k^2t^2}dt=\frac{1}{k}\int_0^{2\sqrt{2k-1}}\sqrt{1+u^2}du,$$

(après le changement de variable $u=2kt$*). Il s'agit donc d'étudier le maximum de*

$$L\ :\ k\in[\frac{1}{2},+\infty[\ \mapsto\ L(k)=\frac{1}{k}\int_0^{2\sqrt{2k-1}}\sqrt{1+u^2}du.(\star)$$

Commencons par quelques observations (voir les schémas) : pour $0\leq k\leq\frac{1}{2}$ *la parabole se trouve à l'extérieur du disque (figure 1) et* $L(k)\equiv 0$ *; le cas* $k>\frac{1}{2}$ *est celui qui nous intéresse puisque* $L(k)>0$ *d'après* $(\star)$ *; enfin si* k *tends vers* $+\infty$ *la parabole dégénère cette fois-ci en deux demi-droites confondues* $\{0\}\times\mathbb{R}_+$ *ce qui donne comme intersection deux fois le segment* $\{0\}\times[0,2]$ *soit une longueur égale à 4. Il semble donc que notre fonction* L *croit strictement sur* $\mathbb{R}_+^\star$ *de* 0 *à 4. Mais il faut toutefois se méfier des impressions, en effet nous allons maintenant vérifier que*

L n'est pas strictement monotone et même prends des valeurs strictement plus grandes que 4. Justifions cette dernière affirmation :

$$\begin{aligned} L(k) &= \frac{1}{k}\int_0^{2\sqrt{2k-1}} \sqrt{1+u^2}du \\ &= \frac{1}{k}\int_0^{2\sqrt{2k-1}} \left(\sqrt{1+u^2}-u\right)du + \frac{1}{k}\int_0^{2\sqrt{2k-1}} udu \\ &= \frac{1}{k}\int_0^{2\sqrt{2k-1}} \frac{du}{\sqrt{1+u^2}+u} + \frac{4(2k-1)}{2k} \\ &= \frac{1}{k}\int_0^{2\sqrt{2k-1}} \frac{du}{\sqrt{1+u^2}+u} + 4 - \frac{2}{k} \\ &= \frac{1}{k}I(k) + 4 - \frac{2}{k}, \end{aligned}$$

ainsi,

$$L(k) > 4 \quad \Longleftrightarrow \quad \int_0^{2\sqrt{2k-1}} \frac{du}{\sqrt{1+u^2}+u} > 2$$

mais la fonction croissante I vérifie

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{2\sqrt{2k-1}} \frac{du}{\sqrt{1+u^2}+u} = +\infty$$

car la fonction intégrande est clairement non intégrable en $+\infty$: il existe donc $k_0 > \frac{1}{2}$ tel que $k > k_0 \;\Rightarrow\; I(k) > 1$ et par suite

$$\exists\, k_o > \frac{1}{2} \quad : \quad k > k_0 \quad \Longrightarrow L(k) > 4.$$

Remarques : - *La fonction continue L nulle en $1/2$ tend vers tout de même vers 4 en $+\infty$ car*

$$L(k) = \frac{1}{k}I(k) + 4 - \frac{2}{k}$$

et

$$0 \leq \frac{1}{k}I(k) = \frac{1}{k}\int_0^{2\sqrt{2k-1}} \frac{du}{\sqrt{1+u^2}+u} \leq \frac{2\sqrt{2k-1}}{k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

- *Vu les variations de L, notre fonction est bornée sur $[1/2, +\infty[$ et atteint son maximum pour une valeur $1/2 < m < +\infty$. En utilisant un logiciel de calcul, on peut donner une valeur approchée de m.........autour de $4,001$...semble-t-il.*

On peut s'étonner que pour résoudre cet exercice on n'étudie pas la fonction L. En effet il n'est pas trés difficile de trouver une primitive :

$$\int \sqrt{1+u^2}du = \frac{1}{2t\sqrt{2t-1}} + \frac{1}{2}\log\left(t + \sqrt{1+t^2}\right)$$

mais son apparence peu sympathique nous enlève les dernières envies de calculer la dérivée de L pour étudier ses variations....

Références