Optimisation dans un triangle

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

Exercice 0.1 ★ ***Optimisation dans un triangle***

On désigne par h_1, h_2, h_3 les hauteurs d'un triangle et par ρ le rayon de son cercle inscrit. Déterminer le minimum de

$$\frac{h_1 + h_2 + h_3}{\rho}$$

lorsque l'on décrit tous les triangles non dégénérés du plan.

Solution : *Si on note S l'aire du triangle, a, b, c les longueurs de ses cotés, nous avons*[1]

$$h_1 = \frac{2S}{a}, \quad h_2 = \frac{2S}{b}, \quad h_3 = \frac{2S}{c}, \quad \rho = \frac{S}{p} \text{ où } 2p = a + b + c.$$

Ainsi

$$\frac{h_1 + h_2 + h_3}{\rho} = (a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 3 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b},$$

et comme il est bien connu que $x + x^{-1} \geq 2$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ avec égalité si et seulement si $x = 1$, nous avons finalement

$$\frac{h_1 + h_2 + h_3}{\rho} \geq 3 + 6 = 9.$$

Le minimum est donc 9 et il est atteint si et seulement si le triangle est équilatéral.

Références