Sur les racines multiples du polynôme dérivé

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Sur les racines multiples du polynôme dérivé***

On considère un $P \in \mathbb{R}[X]$ n'admettant que des racines réelles. Si le polynôme dérivé P' admet une racine réelle multiple a, montrer que $P(a) = 0$.

Solution : *Soit P un tel polynôme de degré $d \geq 1$, soient $a_1 < \cdots < a_r$ les racines distinctes de P de multiplicité respective $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, a_i est donc racine d'ordre $\alpha_i - 1$ de P' ; par Rolle P' admet une nouvelle racine b_i sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ $(1 \leq i \leq r-1)$ si bien que nous avons déja $\sum_{i=1}^{r}(\alpha_i - 1) + r - 1$ racines pour P' qui est de degré $d-1$. Soit*

$$d - 1 \geq \sum_{i=1}^{r}(\alpha_i - 1) + r - 1 = \sum_{i=1}^{r}\alpha_i - r + r - 1 = d - 1$$

d'où l'égalité et P' ne peut donc avoir d'autres racines ; les b_i sont donc racines simples et les éventuelles racines multiples de P' sont parmi celles de P.

Références