Racines de $P(z)$ et de $2zP'(z) - dP(z)$

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Racines de*** $P(z)$ ***et de*** $2zP'(z) - dP(z)$

On suppose que toutes les racines d'un polynôme $P \in \mathbb{C}[z]$ *de degré* d *se trouvent sur le cercle unité. Montrer que les racines du polynôme* $Q(z) = 2zP'(z) - dP(z)$ *se trouvent aussi sur le même cercle.*

Solution : *Il est suffisant de supposer que le coefficient dominant de* P *est* 1 *. De la décomposition* $P(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_d)$ *avec* $|\alpha_j| = 1$*, un calcul élémentaire nous donne*

$$Q(z) = 2zP'(z) - dP(z) = (z + \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_d) + \dots + (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z + \alpha_d)$$

soit

$$\frac{Q(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^{d} \frac{z + \alpha_k}{z - \alpha_k},$$

puis

$$\begin{aligned} \mathrm{re}\left(\frac{\mathrm{Q(z)}}{\mathrm{P(z)}}\right) &= \sum_{k=1}^{d} \left(\frac{z + \alpha_k}{z - \alpha_k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{d} \frac{|z|^2 - |\alpha_k|^2}{|z - \alpha_k|^2} = \sum_{k=1}^{d} \frac{|z|^2 - 1}{|z - \alpha_k|^2}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$(|z| \neq 1) \Longrightarrow \left(\mathrm{re}\left(\frac{\mathrm{Q(z)}}{\mathrm{P(z)}}\right) \neq 1\right)$$

soit $Q(z) = 0 \ \Rightarrow\ |z| = 1$ *et le résultat suit.*

Références