Nombre de racines réelles du 2005-ième itéré de $P(x) = x^2 - 1$

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Nombre de racines réelles du 2005-ième itéré de $P(x) = x^2 - 1$***

Soit $P(x) = x^2 - 1$, déterminer le nombre de racines réelles distinctes de l'équation

$$\underbrace{P(P(\dots(P}_{2005}(x)))) = 0.$$

Solution : *Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:*

$$P_n(x) = \underbrace{P(P(\dots(P}_{n}(x)))).$$

- *Comme $P_1(x) = x^2 - 1 \geq -1$ sur $\mathbb{R}$, nous avons pour tout $x \in \mathbb{R}$: $P_{n+1}(x) = P_1(P_n(x)) \geq -1$ et l'équation $P_n(x) = a$ n'admet pas de solution pour tout $a < -1$.*
- *Montrons que l'équation $P_n(x) = a$ admet exactement deux racines réelles distinctes pour tout $a > 0$. Pour cela, procédons par récurrence sur $n \geq 1$: pour $n = 1$ c'est clair. Supposons l'assertion vraie au rang n, $P_{n+1}(x) = a$ équivaut à $P_1(P_n(x)) = a$ qui implique $P_n(x) = -\sqrt{a+1}$ ou $P_n(x) = \sqrt{a+1}$; l'équation $P_n(x) = \sqrt{a+1} > 1$ admet exactement deux solutions distinctes par hypothèse de récurrence ; l'équation $P_n(x) = -\sqrt{a+1}$ est sans solutions réelles puisque $-\sqrt{a+1} < -1$. Ainsi l'équation $P_n(x) = a$ admet exactement deux racines réelles distinctes pour tout $a > 0$.*
- *Nous allons maintenant montrer que l'équation $P_n(x) = 0$ admet exactement $n+1$ solutions réelles distinctes. On procède à nouveau par récurrence sur n. Si $n = 1$ les solutions sont ± 1 et si $n = 2$: 0 et $\pm\sqrt{2}$. Supposons l'assertion vraie au rang $n \geq 3$. Comme on peut écrire $P_{n+2}(x) = P_2(P_n(x)) = P_n^2(x)(P_n^2(x) - 2)$, l'ensemble des solutions réelles de l'équation $P_{n+2}(x) = 0$ est exactement la réunion des racines réelles de équations $P_n(x) = 0,\ P_n(x) = \sqrt{2}$ et $P_n(x) = -\sqrt{2}$. Vu l'hypothèse de récurrence l'équation $P_n(x) = 0$ admet $n+1$ racines réelles distinctes et les deux premières étapes nous assurent que les équations $P_n(x) = \sqrt{2} > 0$ et $P_n(x) = -\sqrt{2} < -1$ admettent respectivement 2 et 0 racines réelles ; ces trois ensembles étant deux à deux disjoints, l'équation $P_{n+2}(x) = 0$ admet $n + 1 + 2 = n + 3$ solutions et l'assertion est bien établie.*

En particulier l'équation $P_{2005}(x) = 0$ admet 2006 racines réelles distinctes.

Références