Encore un calcul de $\zeta(2)$

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

22 février 2024

Exercice 0.1 ★ **Encore un calcul de** $\zeta(2)$

[1]

1. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme P_n vérifiant*

$$P_n(\mathrm{cotan}^2(\mathrm{t})) = \frac{\sin((2\mathrm{n}+1)\mathrm{t})}{\sin^{2\mathrm{n}+1}(\mathrm{t})}, \qquad \forall\, \mathrm{t} \in]0, \pi/2[.$$

2. *Expliciter les racines de P_n et calculer leur somme.*
3. *En observant que*

$$\mathrm{cotan}^2(\mathrm{t}) \leq \frac{1}{\mathrm{t}^2} \leq 1 + \mathrm{cotan}^2(\mathrm{t}), \qquad \forall\, \mathrm{t} \in]0, \pi/2[,$$

retrouver la valeur de $\quad \zeta(2) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$.

Solution :

1. *La formule de Moivre nous donne pour tout $t \in]0, \pi/2[$*

$$\sin((2n+1)t) = \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} (-1)^k \sin^{2k+1}(t) \cos^{2(n-k)}(t)$$

soit, en divisant par le réel non nul $\sin^{2n+1}(t)$

$$\frac{\sin((2n+1)t)}{\sin^{2n+1}(t)} = \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} (-1)^k \mathrm{cotan}^{2(\mathrm{n}-\mathrm{k})}(\mathrm{t}) = \mathrm{P_n}(\mathrm{cotan}^2(\mathrm{t}))$$

avec $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} (-1)^k X^{n-k}$. Pour l'unicité, il suffit de remarquer que si $Q \in \mathbb{R}[X]$ répond également au problème alors $P_n(x) = Q(x)$ pour tout $x > O$: en effet tout tel x peut s'écrire $x = \mathrm{cotan}^2(\mathrm{t})$ avec $t = \mathrm{arccotan}(\sqrt{\mathrm{t}}) \in]0, \pi/2[$.

2. *P_n est bien de degré n et l'équation $P_n(\mathrm{cotan}^2(\mathrm{t})) = \sin((2\mathrm{n}+1)\mathrm{t})$ nous donne déja comme racines $x_k = \mathrm{cotan}^2\left(\frac{\mathrm{k}\pi}{2\mathrm{n}+1}\right),\ \mathrm{k} \in \{1,\ldots,\mathrm{n}\}$; ces racines étant deux à deux distinctes, il s'agit de toutes les racines de P_n. Enfin, la somme des racines étant l'opposé du coefficient de X^{n-1} divisé par le coefficient dominant de P_n :*

$$x_1 + \cdots + x_n = \frac{C_{2n+1}^3}{C_{2n+1}^1} = \frac{n(2n-1)}{3}.(\star)$$

3. *La double inégalité résulte de l'inégalité classique $\sin(t) \leq t \leq \tan(t)$ valable sur $]0,\pi/2[$ (faire une étude de fonction ou invoquer un argument de convexité). Si on écrit cette inégalité pour $t = k\pi/2n+1$, en les sommant pour $1 \leq k \leq n$ il vient avec $(\star)$*

$$\frac{n(2n-1)}{3} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n+1)^2}{\pi^2 k^2} \leq n + \frac{n(2n-1)}{3}.$$

Il ne reste plus qu'à diviser par $(2n+1)^2/\pi^2$ et faire tendre n vers $+\infty$ pour retrouver la valeur bien connue

$$\zeta(2) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Références

[1] S. Francinou, H. Gianella, and H. Nicolas. Exercices de Mathématiques (oraux X-ENS) : algèbre 1. Cassini, 2001.