

Encore un calcul de $\zeta(2)$

Patrice Lassère¹

¹, Université Paul Sabatier, Toulouse

28 février 2024

Exercice 0.1 ★ **Encore un calcul de $\zeta(2)$**

[1]

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme P_n vérifiant

$$P_n(\cotan^2(t)) = \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin^{2n+1}(t)}, \quad \forall t \in]0, \pi/2[.$$

2. Expliciter les racines de P_n et calculer leur somme.

3. En observant que

$$\cotan^2(t) \leq \frac{1}{t^2} \leq 1 + \cotan^2(t), \quad \forall t \in]0, \pi/2[,$$

retrouver la valeur de $\zeta(2) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$.

Références

- [1] S. Francinou, H. Gianella, and H. Nicolas. Exercices de Mathématiques (oraux X-ENS) : algèbre 1. Cassini, 2001.