Une inégalité autour des polynômes

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Une inégalité autour des polynômes***

Montrer qu'il existe une constante $C \geq 4.10^6$ telle que

$$\forall\, P \in \mathbb{C}_{2004}[X], \qquad |P(1) - P'(1) + P(-1) + P'(-1)| \leq C \int_{-1}^{1} |P(t)| dt.$$

Solution : *Considérons l'application*

$$f \;:\; (a_0, a_1, \dots, a_{2004}) \in \mathbb{C}^{2005} \setminus \{0_{\mathbb{C}^{2005}}\} \mapsto f(a_0, a_1, \dots, a_{2004}) = \frac{|P(1) - P'(1) + P(-1) + P'(-1)|}{\int_{-1}^{1} |P(t)| dt},$$

où $P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{2004} x^{2004} \in \mathbb{C}_{2004}[X]$.

- Il n'est pas difficile de vérifier que f est homogène de degré 0, i.e.

$$f(ta_0, ta_1, \dots, ta_{2004}) = f(a_0, a_1, \dots, a_{2004}), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^{\star}.$$

- Le second point est que f est continue sur la sphère unité de $\mathbb{C}^{2004}$ (c'est une fraction rationnelle en les variables $a_0, a_1, \dots, a_{2004}$) dont le dénominateur $\int_{-1}^{1} |P(t)| dt$ s'annule seulement si $P = 0$ i.e. $a_0 = a_1 = \dots = a_{2004} = 0$).

Par compacité de la sphère unité, l'application continue f y est bornée (disons par $C > 0$) et par homogénéité $f \leq C$ sur $\mathbb{C}^{2004} \setminus \{0_{2004}\}$. L'inégalité pour $P = 0$ étant une égalité, la démonstration est terminée.

Avec $P(x) = x^{2004}$ on vérifie sans peine que $C \geq 4.10^6$.

Références