# Le théorème de Gauss-Lucas : nouvelle approche

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

***Exercice 0.1*** ★ ***Le théorème de Gauss-Lucas : nouvelle approche***

*Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme, $P'$ son polynôme dérivé. Il s'agit de montrer que les racines de $P'$ sont dans l'enveloppe convexe des racines de $P$ (théorème de Gauss-Lucas).*

1. *Soient $z_1, z_2, \dots, z_n$ vérifiant*

$$\exists \psi, \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \ : \quad z_j = \rho_j e^{i\theta_j} \ \text{ avec } \ 0 \leq |\theta_{\mathrm{j}}| < \psi < \frac{\pi}{2}.$$

   *(en d'autre terme les $z_j$ sont à partie réelle strictement positive et l'angle sous lequel on les voit depuis l'origine est inférieur à $2\psi$) montrer que*

$$|z_1 \dots z_n|^{1/n} \cos(\psi) \leq \frac{1}{n} |z_1 + \cdots + z_n| . (\star)$$

2. *Soit $P \in \mathbb{C}[z]$ et $H$ l'enveloppe convexe de ses racines. Soient $z \notin H$ et $2\psi$ l'angle sous lequel $H$ est vu de $z$ ; montrer que*

$$\left| \frac{a_n}{P(z)} \right|^{1/n} \leq \frac{1}{n \cos(\psi)} \left| \frac{P'(z)}{P(z)} \right| . (\star)$$

3. *En déduire le théorème de Gauss-Lucas.*

## Références