Autour du résultant de deux polynômes

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ **Autour du résultant de deux polynômes**

Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif, $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes non nuls de degrés respectifs n et m. Montrer que la famille $\mathscr{F} = \{P, XP, X^2P, \dots, X^{m-1}P, Q, XQ, \dots, X^{n-1}Q\}$ est libre dans $\mathbb{K}[X]$ si et seulement si P et Q sont premiers entre eux.

Solution : *- Soit α une racine commune aux deux polynômes P, Q : il existe alors deux polynômes non nuls P_0, Q_0 tels que*

$$P(X) = (X-\alpha)P_0(X) \quad \& \quad Q(X) = (X-\alpha)Q_0(X)$$

si bien qu'en posant $U = Q_0,\ V = -P_0$ on a

$$UP + VQ = 0$$

avec

$$\deg(U) = \deg(Q) - 1,\ \deg(V) = \deg(P) - 1.$$

-Réciproquement, supposons qu'il existe deux polynômes non nul U, V tels que

$$\deg(U) < \deg(Q) \quad \& \quad \deg(V) < \deg(P)$$

suite ? ? ? ? ? ? ? ? ?

Remarques & applications :

*- On appelle **matrice de Sylvester**, la matrice $S(P,Q)$ dans la base canonique de $\mathbb{K}_{n+m-1}[X]$ du système de vecteurs $\mathscr{F}$, son déterminant $res(P,Q) = \det S(P,Q)$ est le **résultant** de P et Q ; on a donc :*

$$res(P,Q) \neq 0 \iff P \wedge Q = 1.$$

- Une application immédiate est que l'ensemble $\mathscr{D}'_n(\mathbb{C})$ formé des matrices ayant n valeurs propres distinctes est un ouvert de $M_n(\mathbb{C})$: en effet vu la remarque précédente

$$A \in \mathscr{D}'_n(\mathbb{C}) \iff P_A \wedge P'_A = 1 \iff \varphi(A) = res(P_A, P'_A) \neq 0,$$

l'ensemble $\mathscr{D}'_n(\mathbb{C})$ est donc ouvert de $M_n(\mathbb{C})$ comme image réciproque de l'ouvert $\mathbb{C}^\star$ par l'application continue (car polynomiale en les coefficients de A) φ, c'est en fait même un ouvert dense (voir l'exercice ci-dessous).

Références