Polynômes trigonométriques : un théorème de Fejèr-Riesz

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★ ***Polynômes trigonométriques : un théorème de Fejèr-Riesz***

[1],ex.77, 2003/04 Soit $g \ : \ x \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$. *On suppose* g *positive sur* $\mathbb{R}$*, montrer qu'il existe* $P \in \mathbb{C}[X]$ *tel que*

$$g(x) = |P(e^{ix})|^2, \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Solution : *En écrivant* g *sous la forme*

$$g(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \ \text{ avec } \ c_n \neq 0 \text{ et } c_k = \overline{c_{-}k}, \ \forall\, 0 \leq k \leq n$$

nous avons pour $\varepsilon \geq 0$

$$\begin{aligned} g_\varepsilon(x) := g(x) + \varepsilon &= e^{-inx}\left(c_{-n} + c_{-n+1}e^{ix} + \cdots + (c_0+\varepsilon)e^{inx} + \cdots + c_n e^{2inx}\right) \\ &= e^{-inx} Q_\varepsilon(e^{ix}) \qquad\qquad (\star) \end{aligned}$$

où le polynôme

$$Q_\varepsilon(z) = c_{-n} + c_{-n+1}z + \cdots + (c_0+\varepsilon)z^n + \cdots + c_n z^{2n}$$

vérifie pour tout $\varepsilon > 0$ *et* $z \in \mathbb{C}^\star$

$$Q_\varepsilon(z) = z^{2n}\overline{Q_\varepsilon\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}.(\bigstar)$$

La démonstration s'enchaîne alors de la manière suivante :

- ***Étape 1 :*** Pour tout $\varepsilon > 0$, le polynôme Q_ε est sans racines sur le cercle unité. *C'est une conséquence immédiate de la formule* $(\star)$ *qui implique* $|Q_\varepsilon(e^{ix})| \geq \varepsilon$.

- ***Étape 2 :*** Soit $\varepsilon > 0$. Si $\zeta \in \mathbb{C}$ est une racine de Q_ε, alors $\overline{\zeta}^{-1}$ est aussi racine de Q_ε avec la même multiplicité.

Remarquons déja que, $Q_\varepsilon(0) \geq \varepsilon > 0$, donc $\zeta \neq 0$. On a alors $Q_\varepsilon(z) = (z-\zeta)^d R(z)$ où $R \in \mathbb{C}_{2n-d}[X]$ vérifie $R(\zeta) \neq 0$. En exploitant ($\bigstar$), on peut aussi écrire $Q_\varepsilon(z) = (1-\overline{\zeta}z)^d S(z)$ où le polynôme $S(z) = z^{2n-d}\overline{R(\overline{z}^{-1})}$ vérifie $S(\overline{\zeta}^{-1}) \neq 0$. C.Q.F.D.

- ***Étape 3 :*** Les éventuelles racines de Q_0 sur le cercle unité sont de multiplicités paires.

Supposons au contraire qu'une telle racine $e^{i\theta}$ soit de multiplicité $2m-1,\ m \in \mathbb{N}^\star$. La suite de polynômes $(Q_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ étant simplement convergente sur $\mathbb{R}$ vers Q_0, les racines d'un polynôme dépendant continuement de ses coefficients et les polynômes Q_ε étant sans racines sur le cercle unité, il existe $r > 0,\ \varepsilon_r > 0$ tels que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_r$ le polynôme Q_ε possède exactement $2m-1$ racines (comptées avec leurs multiplicités) dans le disque $D(e^{i\theta}, r)$. Vu l'étape précédente, et quitte à réduire ε_r, nous sommes alors assurés que pour toute racine ζ de Q_ε

$$\zeta \in D(e^{i\theta}, r) \cap D(0,1) \quad \iff \quad \overline{\zeta}^{-1} \in D(e^{i\theta}, r) \cap \mathbb{C} \setminus \overline{D(0,1)}$$

ces zéros ont donc même multiplicité et le nombre de racine de Q_ε dans $D(e^{i\theta}, r)$ $(0 < \varepsilon < \varepsilon_r)$ est forcément pair, d'où la contradiction et les racines éventuelles de Q_0 sur le cercle unité sont de multiplicité paire.

- ***Étape 4 : la conclusion*** *$\zeta_1^\varepsilon, \dots, \zeta_n^\varepsilon$ désignant les racines de Q_ε dans le disque unité, nous avons donc*

$$Q_\varepsilon(z) = \frac{(-1)^n c_n}{\overline{\zeta_1^\varepsilon} \dots \overline{\zeta_n^\varepsilon}} \prod_{j=1}^n (z - \zeta_j^\varepsilon)(1 - \overline{\zeta_j^\varepsilon} z)$$

où la somme ne porte que sur les racines $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ de module strictement plus petit que 1 (conséquence des deux premières étapes). Il ne reste plus qu'à faire tendre ε vers vers zéro, et, toujours en invoquant la continuité « coefficients-racines » d'un polynôme :

$$Q_0(z) = \frac{(-1)^n c_n}{\overline{\zeta_1} \dots \overline{\zeta_n}} \prod_{j=1}^n (z - \zeta_j)(1 - \overline{\zeta_j} z)$$

(si par exemple $|\zeta| < 1$ est racine de Q_0, il existera une suite $(\zeta_\varepsilon)_\varepsilon$ de racines de Q_ε de module < 1 et de limite ζ ; vu l'étape 2, la suite de racines $(\overline{\zeta_\varepsilon}^{-1})_\varepsilon$ se doit de converger vers la racine $\overline{\zeta}^{-1}$; par « symétrie » la situation est analogue à l'extérieur du disque unité, enfin sur le cercle unité on invoque l'étape 3 tout en remarquant que dans ce cas $\zeta = \overline{\zeta}^{-1}$).

On peut donc écrire

$$\begin{aligned} g(x) = e^{-inx} Q_0(e^{ix}) &= \frac{(-1)^n c_n e^{inx}}{\overline{\zeta_1} \dots \overline{\zeta_n}} \prod_{j=1}^n (e^{ix} - \zeta_j)(1 - \overline{\zeta_j} e^{ix}) \\ &= \frac{(-1)^n c_n}{\overline{\zeta_1} \dots \overline{\zeta_n}} \prod_{j=1}^n (e^{ix} - \zeta_j)(e^{-ix} - \overline{\zeta_j}) \\ &= \frac{(-1)^n c_n}{\overline{\zeta_1} \dots \overline{\zeta_n}} \Big| \prod_{j=1}^n (e^{ix} - \zeta_j) \Big|^2, \end{aligned}$$

finalement,

$$g \geq 0 \implies c = \frac{(-1)^n c_n}{\overline{\zeta_1} \dots \overline{\zeta_n}} \geq 0,$$

en posant $d := \sqrt{c}$ *et* $P(X) = d \prod_{j=1}^{n} (X - \zeta_j)$, *soit encore*

$$g(x) = \left|P(e^{ix})\right| 2$$

et le résultat est démontré.

Remarque : *Ce résultat est dû à L.* Fejèr *et F.* Riesz *(voir F.* Riesz *& B.S.* Nagy *« Functional Analysis », Dover, pages 117-118 ou bien Q.I.* Rahman *& G.* Schmeisser « Analytic Theory of Polynomials », *Oxford Publications (2002) page 410). On peut aussi remarquer que pour notre choix de* P*, toutes ses racines sont dans le disque unité fermé.*

Références

[1] Revue de Mathématiques Supérieure (RMS). e.net et anciennement Vuibert, http ://www.rms-math.com/.