Polynômes dans $\mathbb{Z}[X]$

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

31 janvier 2023

Exercice 0.1 ★ ***Polynômes dans*** $\mathbb{Z}[X]$ ***Polytechnique***

*Montrer que si le produit de deux polynômes $A, B \in \mathbb{Z}[X]$ est un polynôme à coefficients pairs non **tous** multiples de 4, alors dans l'un des deux polynômes A, B, tous les coefficients doivent être pairs et dans l'autre tous ne sont pas pairs.*

Solution : *Notons*

$$A = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n, \qquad B = b_0 + b_1X + \cdots + b_mX^m.$$

Puisque $AB \notin 4\mathbb{Z}[X]$ nécessairement l'un des deux polynômes, disons B, possède au moins un coefficient impair.

Supposons alors que tous les coefficients de A ne soient pas pairs, soit a_s (resp. b_k) le premier coefficient impair de A (resp. B) alors le coefficient de X^{s+k} dans AB est

$$\underbrace{\underbrace{a_0b_{k+s} + a_1b_{k+s-1} + \cdots + a_{s-1}b_{k+1}}_{pair\cdot(?)+pair\cdot(?)+\cdots+pair\cdot(?)}}_{pair} + \underbrace{\underbrace{a_sb_k}_{impair\cdot impair}}_{impair} + \underbrace{\underbrace{a_{s+1}b_{k-1} + \cdots + a_{k+s}b_0}_{(?)\cdot pair+(?)\cdot pair+(?)\cdot pair}}_{pair}$$

il est donc impair, d'où la contradiction.

Références