# Polynômes, nombres premiers

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

24 juin 2023

***Exercice 0.1*** ★ ***Polynômes, nombres premiers***

*[1]*
*Montrer qu'il n'existe pas de polynôme non constant*

$$P(X) = a_d X^d + a_{d-1} X^{d-1} \cdots + a_1 X + a_0$$

*tel que* $P(k)$ *soit premier pour tout entier* $k$ (L.Euler).

***Solution :*** *Soit* $N, M \in \mathbb{N}$ *tels que* $P(N) = M$. *Alors, pour tout entier* $k$

$$P(N+kM) - P(N) = a_d \left((N+kM)^d - N^d\right) + a_{d-1}\left((N+kM)^{d-1} - N^{d-1}\right) + \cdots + a_1(N+kM-N)$$

*est divisible par* $kM$ (car $(N+kM)^j - N^j$, $(1 \leq j \leq d)$ *est divisible par* $N + kM - N = kM$ ) *donc par* $M$. *Ainsi*

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \quad : \quad P(N+kM) \quad \text{est divisible par} \quad M.$$

*Un polynôme de degré* $d \geq 1$ *ne pouvant prendre au plus* $d$ *fois la même valeur il existera dans la suite* $(P(N+kM))_{k=0}^{2n+1} \subset M\mathbb{Z}$ *des entiers distincts de* $\pm M$ *donc non premiers.*

***Remarque :*** *Par contre la réponse est oui en plusieurs variables..............à suivre......*

## Références

[1] N.N. Chentzov, D.O. Shklarsky, and I.M. Yaglom. The USSR Olympiad Problem Book. Dover, 1993.