Polynomes et fractions rationelles, approximation

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

18 avril 2024

Exercice 0.1 ★ ***Polynomes et fractions rationelles, approximation***

[1], 2003/04.

Soit $\mathscr{R}$ l'ensemble des fractions rationnelles réelles sans pôle dans $[0,1]$ et $\mathscr{R}_{m,n}$ le sous-ensemble des fractions $F = \frac{P}{Q}$ où P est de degré $\leqslant n$ et Q de degré $\leqslant m$.

1. *Ces ensembles sont-ils des espaces vectoriels ?*
2. *On considère $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $\inf\{||g-r||_\infty \ / \ r \in \mathscr{R}_{m,n}\}$ est atteint*
   - ***(i)*** *Lorsque $n = 0$.*
   - ***(ii)*** *Dans tous les cas.*

Solution :

1. *Pour $m = 0$, $\mathscr{R}_{m,n}$ est un espace vectoriel (pour les opérations usuelles sur les fonctions) mais pour $m \geqslant 1$, ce n'est pas le cas : par exemple $\frac{x^n}{(x+1)^m} + \frac{x^n}{(x+2)^m} \notin \mathscr{R}_{m,n}$.*
2. *Pour $n = 0$, $\mathscr{R}_{m,n}$ est un espace vectoriel de dimension finie et le résultat découle du fait que dans tout espace vectoriel normé la distance à un sous-espace de dimension finie est atteinte.*

   Passons au ii). Si f est continue sur I et F rationnelle sans pôle dans I, $f - F$ est continue donc bornée sur le segment I. De plus l'ensemble $\{||f-F||_\infty \ / \ F \in E_{mn,}\}$ est non vide et minoré par 0 : il admet une borne inférieure $d_{m,n}(f)$.

   Soit $F_k = \frac{P_k}{Q_k}$, avec $P_k \in \mathbb{R}_m[X]$ et $Q_k \in \mathbb{R}_n[X]$ sans zéro dans I, une suite de $E_{m,n}$ telle que $||f - F_k||_\infty$ tend vers $d_{m,n}(f)$. Quitte à multiplier P_k et Q_k par une même constante, on peut supposer $||Q_k||_\infty = 1$.

   De plus la suite $||F_k - f||_\infty$ est convergente donc bornée, donc la suite des $||F_k||_\infty$ est aussi bornée par un réel $M \geqslant 0$. On a alors $\forall k, ||P_k||_\infty = ||Q_k F_k||_{\infty ???} ||Q_k||_\infty ||F_k||_\infty \leqslant M$. Ainsi les deux suites (P_k) et (Q_k) sont des suites bornées d'un espace normé de dimension finie, selon le théorème de Bolzano-Weirstrass il existe $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(P_{\phi(k)})$ converge vers un polynôme $P \in \mathbb{R}_m[X]$ puis il existe $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(Q_{\phi(\psi(k))})$ converge vers un polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

   Attention, Q n'est pas le polynôme nul (car $||Q||_\infty = 1$) mais a priori il peut s'annuler dans $[0,1]$.

Soit $F = \frac{P}{Q} \in E_{m,n}$. Pour tout x non zéro de Q, on a $F(x) = \lim_k \frac{P_{\phi(\psi(k))}(x)}{Q_{\phi(\psi(k))}(x)}$ (car la convergence uniforme entraîne la convergence simple) et donc

$$|f(x) - F(x)| = \lim_k \Big| f(x) - \frac{P_{\phi(\psi(k))}(x)}{Q_{\phi(\psi(k))}(x)} \Big| \leqslant d_{m,n}(f)$$

Comme f est bornée, on en déduit que F est bornée sur le complémentaire d'une partie finie de $[0,1]$ donc elle n'a pas de pôle dans $[0,1]$ (si elle avait un pôle a on aurait $\lim_{x\to a} |F(x)| = +\infty$) et donc $F \in E_{m,n}$.
De plus le calcul précédent montre que $||f - F||_\infty \leqslant d_{m,n}(f)$ et donc, comme l'inégalité inverse est évidente, on a $||f - F||_\infty = d_{m,n}(f)$.

Références

[1] Revue de Mathématiques Supérieure (RMS). e.net et anciennement Vuibert, http ://www.rms-math.com/.