# Polynômes harmoniques et homogènes en deux variables

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

***Exercice 0.1*** ★ ***Polynômes harmoniques et homogènes en deux variables***

*[?], 2003/04.*

*Soit $E_n$ l'ensemble des polynômes réels à deux variables homogènes de degré $n$, $A_n$ le sous-ensemble des $P \in E_n$ multiples de $X^2+Y^2$ et $H_n$ celui des $P \in E_n$ harmoniques (i.e. tels que $\Delta P = 0$).*

*Montrer qu'on a $E_n = A_n \oplus H_n$.*

***Solution :*** *- $E_n$ est le sous-espace de $\mathbb{R}[X,Y]$ de base $\{X^iY^{n-i}\ /i = 0,\dots,n\}$ donc de dimension $n+1$.*

*-$A_n$ est l'ensemble des $(X^2+Y^2)Q$ où $Q \in E_{n-2}$. En effet, si $Q$ est homogène de degré $n-2$, il est clair que $(X^2+Y^2)Q$ est homogène de degré $n$. Inversement, si $P \in A_n$, homogène de degré $n$, s'écrit $P = (X^2+Y^2)Q$, alors $Q$ est homogène de degré $n-2$ ; pour le voir on peut invoquer le résultat suivant*

$P \in \mathbb{R}[X,Y]$ est homogène de degré $n$ si, et seulement si, $\forall \lambda \in \mathbb{R}, P(\lambda X, \lambda Y) = \lambda^n P(X,Y)$.

*La condition nécessaire est évidente. Pour la condition suffisante si $P = \sum_{(i,j)\in F} a_{i,j}X^iY^j$, avec $F$ fini, la relation donne $\forall (i,j) \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}, a_{i,j}(\lambda^n - \lambda^{i+j}) = 0$ donc, comme $\mathbb{R}$ est infini, $a_{i,j} = 0$ dès que $i+j \neq n$.*

*On déduit que si $P = (X^2+Y^2)Q$ est homogène de degré $n$, on a*

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda^n (X^2+Y^2)Q(\lambda X, \lambda Y) = \lambda^2 (X^2+Y^2)Q(\lambda X, \lambda Y)$$

*puis, du fait que $\mathbb{R}[X,Y]$ est intègre, $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda^{n-2}Q(X,Y) = Q(\lambda X, \lambda Y)$ i.e. $Q \in E_{n-2}$.*

*- On voit donc que $A_n$ est de dimension $n-1$ car l'application $Q \in E_{n-2} \mapsto (X^2+Y^2)Q \in A_n$ est un isomorphisme.*

*- Déterminons le noyau de $\Delta_n : P \in E_n \mapsto \Delta P$. Si $P = \sum_{i=0}^n a_iX^iY^{n-i}$ on a*

$$\Delta P = \sum_{k=0}^{n-2}\big((n-k)(n-k-1)a_k + (k+2)(k+1)a_{k+2}\big)X^kY^{n-2-k}$$

*donc $\Delta P$ est nul si, et seulement si, $\forall k, a_{k+2} = -\frac{(n-k)(n-k-1)}{(k+1)(k+2)}a_k$ c'est à dire si, et seulement si,*

$$\text{pour } 0 \leqslant 2k \leqslant n, a_{2k} = (-1)^k C_n^{2k} a......slant 2k+1 \leqslant n, a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{n} C_n^{2k+1} a_1.$$

*Ainsi l'application qui à $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i Y^{n-i} \in \operatorname{Ker}\Delta$ associe $(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2$ est un isomorphisme donc $\operatorname{Ker}\Delta$ est de dimension 2. De plus tout $P \in \operatorname{Ker}\Delta$ s'écrit $P = a_0R + a_1I$ avec*

$$R = \sum_{0\leqslant 2k \leqslant n}(-1)^k C_n^{2k} X^{2k} Y^{n-2......leqslant 2k+1 \leqslant n}(-1)^k C_n^{2k+1} X^{2k+1} Y^{n-2k-1}.$$

*- Déterminons $A_n \cap \operatorname{Ker}\Delta$. Si $P = aR + bI \in \operatorname{Ker}\Delta$ est multiple de $X^2 + Y^2$, on a un polynôme $Q$ tel que $aR + bI = (X^2+Y^2)Q$ donc $aR(i,1) + bI(i,1) = 0$ soit*

$$a \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} C_n^{2k} + bi \sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n} C_n^{2k+1} = 0$$

*ce qui, puisque $a, b \in \mathbb{R}$, donne $a = b = 0$ et $P = 0$.*

*- En conclusion $A_n$ et $\operatorname{Ker}\Delta$ ont une intersection réduite à $\{0\}$ et la somme de leur dimension est égale à celle de $E_n$ $(n+1)$ donc on a $E_n = A_n \oplus H_n$.*

***Remarques :*** *- Ainsi tout $P \in E_n$ s'écrit de manière unique*

$$P = H + (X^2+Y^2)Q \text{ avec } H \text{ harmonique et } Q \in E_{n-2}.$$

*On peut décomposer $Q$ de la même manière et en itérant on obtient une écriture $P = \sum_{i=0}^{E(n/2)} H_i(X^2+Y^2)^i$ avec $H_i$ harmonique et homogène de degré $n-2i$.*
*- On peut aussi contourner le calcul en notant que les polynômes (complexes) $(X + \pm iY)^n$ sont homogènes de degré $n$ et harmoniques. On en déduit aisément que $\frac{1}{2}\big((X+iY)^n + (X-iy)^n\big)$ et $\frac{1}{2i}\big((X+iY)^n - (X-iy)^n\big)$ constituent une base de $\operatorname{Ker}(\Delta_n)$. D'ailleurs ce sont à peu près les polynômes $R, I$ ci-dessus.*

## Références


[1] Revue de Mathématiques Supérieure (RMS). e.net et anciennement Vuibert, http ://www.rms-math.com/.