

Trois exercices sur les polynômes

Patrice Lassère¹

¹, Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

Exercice 0.1 ★ Trois exercices sur les polynômes

[1], 2003/04.

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, P non constant et E un sous-ensemble fini de \mathbb{C} . Montrer que

$$|P^{-1}(E)| \geq (|E| - 1) \deg P + 1.$$

2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, de degré $d \geq 1$. On note $n(z)$ le nombre de racines de l'équation $P(x) = z$. Donner une expression de

$$\sum_{z \in \mathbb{C}} (d - n(z)).$$

3. Soit $P(X, Y)$ un polynôme réel de deux variables. On suppose P de degré au plus m en X et au plus n en Y . Montrer que la fonction de variable réelle $x \mapsto P(e^x, x)$ admet au plus $mn + m + n$ zéros.

Solution :

1. Notons¹ C l'ensemble des points critiques de P , c'est-à-dire l'ensemble des zéros de P' , $V = P(C)$ l'ensemble des valeurs critiques de P . Introduisons les ensembles $F = E \cap V$ et $G = E \setminus F$.

Soit $w \in G$; par définition de G , tous les zéros du polynôme $P - w$ sont simples, donc $P - w$ possède $\deg(P)$ racines distinctes. De là, $\text{card}(P^{-1}(G)) = \deg(P) \text{card}(G)$.

Ecrivons $F = \{w_1, \dots, w_r\}$ où les w_i sont deux à deux distincts et notons $x_{1,j}, \dots, x_{p(j),j}$ les racines de $P - w_j$, $\alpha_{1,j}, \dots, \alpha_{p(j),j}$ leurs multiplicités, de somme $\deg(P)$. Chaque $x_{i,k}$ est racine de P' avec la multiplicité $\alpha_{i,k} - 1$; le nombre de racines de P' ainsi obtenu est de ce fait

$$S = \sum_{i,j} (\alpha_{i,j} - 1) = r \cdot \deg(P) - \text{card}(P^{-1}(F)) \leq \deg(P')$$

il en résulte $\text{card}(P^{-1}(F)) \geq (r - 1) \deg(P) + 1 = (\text{card}(F) - 1) \deg(P) + 1$.

En réunissant les deux résultats ci-dessus, il vient

$$\begin{aligned} \text{card}(P^{-1}(E)) &= \text{card}(P^{-1}(F)) + \text{card}(P^{-1}(G)) \\ &\geq \deg(P)(\text{card}(F) + \text{card}(G) - 1) + 1 = \deg(P)(\text{card}(E) - 1) + 1. \end{aligned}$$

2. Comme dans la question précédente, on introduit l'ensemble C des points critiques de P , c'est-à-dire l'ensemble des zéros de P' , et l'ensemble $V = P(C)$ des valeurs critiques de P . -Lorsque $z \notin V$, aucune des racines du polynôme complexe $P(X) - z$ n'est multiple, on a donc, avec les notations de l'énoncé, $d = n(z)$. La contribution de z à la somme étudiée est donc nulle.

-Notons z_1, \dots, z_r les éléments de V . Pour j dans $\{1, \dots, r\}$, soient $x_{1,j}, \dots, x_{p(j),j}$ les racines complexes de $P(X) - z_j$ appartenant à C , de multiplicités respectives $\alpha_{1,j}, \dots, \alpha_{p(j),j}$ dans P' . Ces racines sont précisément les racines multiples de $P(X) - z_j$, car ce dernier a pour dérivée P' .

Donc $P(X) - z_j$ possède exactement $d - \sum_{i=1}^{p(j)} \alpha_{i,j}$ racines distinctes, et de ce fait

$$d - n(z) = \sum_{i=1}^{p(j)} \alpha_{i,j}.$$

Or les ensembles $\{x_{1,j}, \dots, x_{p(j),j}\}$ constituent, quand j parcourt $\{1, \dots, r\}$, une partition de C . La somme des $d - n(z)$, $z \in V$, est donc égale à la somme des racines de P' comptées avec leurs multiplicités, c'est-à-dire au degré de P' : la somme cherchée est $d - 1$.

3. On suppose bien évidemment P non nul et non constant. On raisonne par récurrence sur le degré m de P en X , le cas de $m = 0$ étant trivial. Supposons donc $m \geq 1$, et

$$f(x) = P(x, e^x) = e^{mx} P_m(x) + \dots + P_0(x)$$

avec $P_m \neq 0$ et $\deg(P_0) \leq n$. Par les opérations usuelles, la fonction f est développable en série entière sur \mathbb{R} au voisinage de chaque point ; puisque f n'est pas nulle, on peut déterminer, pour chaque zéro a de f , le premier indice p_a tel que $f^{p_a} \neq 0$, que l'on appelle multiplicité du zéro a de f . Avec cette définition, un zéro de f de multiplicité p devient un zéro de f' de multiplicité $p - 1$, et le théorème de Rolle amène usuellement le fait que, si f possède au moins N zéros comptés avec leurs multiplicités, f' en possède au moins $N - 1$. Montrons alors, avec les notations de l'énoncé, que la somme des multiplicités des zéros de f est majorée par $mn + m + n$.

Comme $\deg(P_0) \leq n$, la dérivée $n + 1$ -ème de f est de la forme

$$g(x) = e^{mx} \cdot Q_m(x) + \dots + e^x \cdot Q_1(x)$$

où les Q_i sont des polynômes vérifiant, par une récurrence immédiate, $\deg(Q_i) = \deg(P_i)$. Après simplification par e^x , on applique l'hypothèse de récurrence à g qui possède donc moins de $(m - 1)n + m - 1 + n$ zéros, comptés avec leurs multiplicités. D'après ce qui précède (Rolle) le nombre de zéros de f est borné par $(m - 1)n + m - 1 + n + n + 1 = mn + n + m$.

Références

- [1] Revue de Mathématiques Supérieure (RMS). e.net et anciennement Vuibert, <http://www.rms-math.com/>.