Trois exercices sur les polynômes

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

19 janvier 2023

Exercice 0.1 ★ ***Trois exercices sur les polynômes***

[1], 2003/04.

1. *Soit* $P \in \mathbb{C}[X]$, P *non constant et* E *un sous-ensemble fini de* $\mathbb{C}$. *Montrer que*
$$|P^{-1}(E)| \geqslant (|E|-1)\deg P + 1.$$
2. *Soit* $P \in \mathbb{C}[X]$, *de degré* $d \geqslant 1$. *On note* $n(z)$ *le nombre de racines de l'équation* $P(x) = z$. *Donner une expression de*
$$\sum_{z\in\mathbb{C}} (d - n(z)).$$
3. *Soit* $P(X,Y)$ *un polynôme réel de deux variables. On suppose* P *de degré au plus* m *en* X *et au plus* n *en* Y. *Montrer que la fonction de variable réelle* $x \mapsto P(e^x, x)$ *admet au plus* $mn + m + n$ *zéros.*

Solution :

1. *Notons*[1] C *l'ensemble des points critiques de* P, *c'est-à-dire l'ensemble des zéros de* P', $V = P(C)$ *l'ensemble des valeurs critiques de* P. *Introduisons les ensembles* $F = E \cap V$ *et* $G = E \setminus F$.

   Soit $w \in G$; *par définition de* G, *tous les zéros du polynôme* $P - w$ *sont simples, donc* $P - w$ *possède* $\deg(P)$ *racines distinctes. De là,* $\mathrm{card}(P^{-1}(G) = \deg(P)\,\mathrm{card}(G)$.

   Ecrivons $F = \{w_1, \dots, w_r\}$ *où les* w_i *sont deux à deux distincts et notons* $x_{1,j}, \dots, x_{p(j),j}$ *les racines de* $P - w_j$, $\alpha_{1,j}, \dots, \alpha_{p(j),j}$ *leurs multiplicités, de somme* $\deg(P)$. *Chaque* $x_{i,k}$ *est racine de* P' *avec la multiplicité* $\alpha_{i,k} - 1$; *le nombre de racines de* P' *ainsi obtenu est de ce fait*
$$S = \sum_{i,j} (\alpha_{i,j} - 1) = r.\deg(P) - \mathrm{card}(P^{-1}(F) \leqslant \deg(P')$$
   il en résulte $\mathrm{card}(P^{-1}(F)) \geqslant (r-1)\deg(P) + 1 = (\mathrm{card}(F) - 1)\deg(P) + 1$.

   En réunissant les deux résultats ci-dessus, il vient

$$\begin{aligned}\mathrm{card}(P^{-1}(E)) &= \mathrm{card}(P^{-1}(F)) + \mathrm{card}(P^{-1}(G))\\ &\geq \deg(P)(\mathrm{card}(F) + \mathrm{card}(G) - 1) + 1 = \deg(P)(\mathrm{card}(E) - 1) + 1.\end{aligned}$$

2. *Comme dans la question précédente, on introduit l'ensemble C des points critiques de P, c'est-à-dire l'ensemble des zéros de P', et l'ensemble $V = P(C)$ des valeurs critiques de P.*
-Lorsque $z \notin V$, aucune des racines du polynôme complexe $P(X) - z$ n'est multiple, on a donc, avec les notations de l'énoncé, $d = n(z)$. La contribution de z à la somme étudiée est donc nulle.
-Notons $z_1, \dots, z_r$ les éléments de V. Pour j dans $\{1, \dots, r\}$, soient $x_{1,j}, \dots, x_{p(j),j}$ les racines complexes de $P(X) - z_j$ appartenant à C, de multiplicités respectives $\alpha_{1,j}, \dots, \alpha_{p(j),j}$ dans P'. Ces racines sont précisément les racines multiples de $P(X) - z_j$, car ce dernier a pour dérivée P'.
Donc $P(X) - z_j$ possède exactement $d - \sum_{i=1}^{p(j)} \alpha_{i,j}$ racines distinctes, et de ce fait
$$d - n(z) = \sum_{i=1}^{p(j)} \alpha_{i,j}.$$
Or les ensembles $\{x_{1,j}, \dots, x_{p(j),j}\}$ constituent, quand j parcourt $\{1, \dots, r\}$, une partition de C. La somme des $d - n(z)$, $z \in V$, est donc égale à la somme des racines de P' comptées avec leurs multiplicités, c'est-à-dire au degré de P' : la somme cherchée est $d - 1$.

3. *On suppose bien évidemment P non nul et non constant. On raisonne par récurrence sur le degré m de P en X, le cas de $m = 0$ étant trivial. Supposons donc $m \geqslant 1$, et*
$$f(x) = P(x, e^x) = e^{mx} P_m(x) + \cdots + P_0(x)$$
avec $P_m \neq 0$ et $\deg(P_0) \leqslant n$. Par les opérations usuelles, la fonction f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ au voisinage de chaque point ; puisque f n'est pas nulle, on peut déterminer, pour chaque zéro a de f, le premier indice p_a tel que $f^{p_a} \neq 0$, que l'on appelle multiplicité du zéro a de f. Avec cette définition, un zéro de f de multiplicité p devient un zéro de f' de multiplicité $p - 1$, et le théorème de Rolle amène usuellement le fait que, si f possède au moins N zéros comptés avec leurs multiplicités, f' en possède au moins $N - 1$. Montrons alors, avec les notations de l'énoncé, que la somme des multiplicités des zéros de f est majorée par $mn + m + n$.
Comme $\deg(P_0) \leqslant n$, la dérivée $n + 1$-ème de f est de la forme
$$g(x) = e^{mx}.Q_m(x) + \cdots + e^x.Q_1(x)$$
où les Q_i sont des polynômes vérifiant, par une récurrence immédiate, $\deg(Q_i) = \deg(P_i)$. Après simplification par e^x, on applique l'hypothèse de récurrence à g qui possède donc moins de $(m-1)n+m-1+n$ zéros, comptés avec leurs multiplicités. D'après ce qui précède (Rolle) le nombre de zéros de f est borné par $(m - 1)n + m - 1 + n + n + 1 = mn + n + m$.

Références

[1] Revue de Mathématiques Supérieure (RMS). e.net et anciennement Vuibert, http ://www.rms-math.com/.