Sur les polynômes de la forme $P = QP''$ avec $\deg(Q) = 2$

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

Exercice 0.1 ★ ***Sur les polynômes de la forme*** $P = QP''$ **avec deg**$(Q) = 2$

Putnam 1999

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ *un polynôme de degré* d*. On suppose que* $P = QP''$ *où* Q *est de degré* 2*. Montrer que si* P *admet au moins deux racines distinctes alors, il doit avoir* d *racines distinctes.*

Solution : - ***Solution 1 :*** *Supposons que* P *n'admet pas* d *racines distinctes, il admet donc une racine au moins double que l'on peut supposer, sans perdre de généralité être égale à* 0 *(quitte à remplacer* x *par* $x - a$*). Désignons par* n *la multiplicité de ce zéro, on a donc* $P(x) = x^n R(x)$ *avec* $R(0) \neq 0$*. Soit*

$$P''(x) = (n^2 - n)x^{n-2}R(x) + 2nx^{n-1}R'(x) + x^n R''(x).$$

Comme $R(0) \neq 0$ *et* $n \geq 2$*,* $x = 0$ *est une racine d 'ordre au plus* $n - 2$ *de* P'' *et par conséquent (car c'est aussi une racine d'ordre* n *de* P*)* x^2 *divise* Q*. Mais* Q *est de degré* 2 *et donc de la forme* $Q(x) = Cx^2$ *où* $C = d^{-1}(d-1)^{-1}$ *(en comparant les termes de degré* d *dans* $P = Cx^2P''$*...).*

Pour conclure, l'égalité $P(x) = a_d x^d + \cdots + a_1 x + a_0 = d^{-1}(d-1)^{-1}x^2P''(x)$ *implique* $a_j = d^{-1}(d-1)^{-1}j(j-1)a_j,\ 0 \leq j \leq d$*, soit* $a_j = 0$ *pour* $0 \leq j \leq d-1$ *et finalement* $P(x) = a_d x^d$*.*

Références