

Pas de titre

Alain Soyeur¹, Emmanuel Vieillard-Baron², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

²Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

³, ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★★ Pas de titre

On considère deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ non-nuls et orthogonaux. Résoudre l'équation vectorielle :

$$\begin{cases} \vec{x} \wedge \vec{a} = \vec{b} \\ \vec{b} \wedge \vec{x} = \vec{a} \end{cases}$$

Solution : Soit $\vec{x}$ un vecteur solution. On calcule $\vec{b} \wedge (\vec{x} \wedge \vec{a}) = \vec{b} \wedge \vec{b} = \vec{0}$ d'où en utilisant la formule du double produit vectoriel, $(\vec{b} \cdot \vec{a})\vec{x} - (\vec{b} \cdot \vec{x})\vec{a} = \vec{0}$. Mais puisque $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ et que $\vec{a} \neq \vec{0}$, on en tire que $\vec{b} \cdot \vec{x} = 0$. De la même façon, en calculant $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{x})$, on trouve que $\vec{a} \cdot \vec{x} = 0$. Puisque le vecteur $\vec{x}$ est orthogonal à $\vec{a}$ et à $\vec{b}$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{x} = \lambda \vec{a} \wedge \vec{b}$. Alors en calculant

$$\lambda(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{a} = \lambda \|\vec{a}\|^2 \vec{b}$$

on doit avoir $\lambda = \frac{1}{\|\vec{a}\|^2}$. De même, en calculant

$$\vec{b} \wedge (\lambda \vec{a} \wedge \vec{b}) = \lambda \|\vec{b}\|^2 \vec{a}$$

on doit avoir $\lambda = \frac{1}{\|\vec{b}\|^2}$. Par conséquent,

- Si $\|\vec{a}\| \neq \|\vec{b}\|$, $\mathcal{S} = \emptyset$.
- Si $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\|$, $\mathcal{S} = \left\{ \frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{\|\vec{a}\|^2} \right\}$.

où $\mathcal{S}$ est l'ensemble solution du système étudié.

Références