Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Dans l'espace, on considère un vecteur $\overrightarrow{u}$ unitaire et une base orthonormale directe $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

1. *Calculer $\alpha = \|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{i}\|^2 + \|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{j}\|^2 + \|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{k}\|^2$.*
2. *En déduire que l'une de ces trois normes est supérieure ou égale à $\sqrt{2/3}$.*

Solution :

1. *Notons $\overrightarrow{u}\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$. Alors $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{i}\begin{vmatrix} 0 \\ z \\ -y \end{vmatrix}$, $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{j}\begin{vmatrix} -z \\ 0 \\ x \end{vmatrix}$, $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{k}\begin{vmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{vmatrix}$. Par conséquent, $\alpha = 2(x^2+y^2+z^2) = 2$ puisque $\|u\|^2 = 1$.*
2. *Par l'absurde, si les trois normes étaient toutes strictement inférieures à $\sqrt{2/3}$, on aurait $2 = \alpha < 2/3 + 2/3 + 2/3 = 2$, ce qui est absurde.*

Références