Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

28 décembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace. Montrer que :

$$\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w})\,\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})\,\overrightarrow{w}$$

Solution : *Considérons un repère orthonormal direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ dans lequel les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ sont $(a, 0, 0)$, celles de $\overrightarrow{v}$ sont $(a', b', 0)$ (il suffit pour cela que $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ engendrent un plan contenant $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$) et celles de $\overrightarrow{w}$ sont (a'', b'', c''). On a alors :*

$$\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) = \left|\begin{matrix} a \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right. \wedge \left(\left|\begin{matrix} a' \\ b' \\ 0 \end{matrix}\right. \wedge \left|\begin{matrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{matrix}\right. \right) = \left|\begin{matrix} a \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right. \wedge \left|\begin{matrix} b'c'' \\ -a'c'' \\ a'b'' - b'a'' \end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix} 0 \\ aa''b' - aa'b'' \\ -aa'c'' \end{matrix}\right.$$

et :

$$(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w})\,\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})\,\overrightarrow{w} = aa'' \left|\begin{matrix} a' \\ b' \\ 0 \end{matrix}\right. - aa' \left|\begin{matrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix} 0 \\ aa''b' - aa'b'' \\ -aa'c'' \end{matrix}\right.$$

d'où l'égalité.

Références