Toute matrice carrée réelle est produit de deux matrices symétriques réelles

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Toute matrice carrée réelle est produit de deux matrices symétriques réelles***

[?]

1. *Montrer que pour toute matrice carrée réelle, il existe une matrice de passage à sa transposée qui soit symétrique.*
2. *En déduire que toute matrice carrée réelle est le produit de deux matrices symétriques réelles.*

Solution :

1. *La solution repose sur le fait suivant : « toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est semblable à sa transposée mais si de plus A est une matrice cyclique (i.e. semblable a une matrice compagnon), on peut imposer à la matrice de passage d'être symétrique réelle. » que l'on va pouvoir étendre à tout $M_n(\mathbb{R})$.*

   En effet, soient

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{C}),$$

   alors

$$AS = \begin{pmatrix} -a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ 0 & a_3 & a_4 & \iddots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   est une matrice symétrique et par conséquent $AS = {}^t\!\left(AS\right) = S\left({}^tA\right)$ i.e. $A = S\left({}^tA\right)S^{-1}$.

Il en résulte immédiatement que toute matrice de Frobenius (i.e. une matrice constituée de blocs diagonaux cycliques) F admet une matrice de passage à sa transposée S symétrique réelle ($F = SAS^{-1}$). Vérifions maintenant que cette propriété se généralise à ***toutes*** *les matrices.*

Comme toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est semblable à une matrice de Frobenius (c'est le théorème de décomposition de Frobenius analogue cyclique du théorème de décomposition de Jordan) il existe donc $P \in GL_n(\mathbb{R}), S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$ et F matrice de Frobenius, telles que

$$A = PFP^{-1}, \quad F = S\,{}^tFS^{-1}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} A = P(S\,{}^tFS^{-1})P^{-1} &= (PS)({}^tP\,{}^tP^{-1})\,{}^tF({}^tP\,{}^tP^{-1})(S^{-1}P^{-1}) \\ &= (PS\,{}^tP)({}^tP^{-1}\,{}^tF\,{}^tP)({}^tP^{-1}S^{-1}P^{-1}) \\ &= (PS\,{}^tP)\,{}^tA({}^tP^{-1}S^{-1}P^{-1}) \\ &= (PS\,{}^tP)\,{}^tA(PS\,{}^tP)^{-1} = S_1\,{}^tAS_1^{-1} \end{aligned}$$

où $S_1 = PS\,{}^tP$. La matrice de passage S_1 est clairement symétrique, nous avons donc démontré que pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice de passage symétrique S telle que $A = S\,{}^tAS^{-1}$.

2. *On peut alors écrire*

$$A = SS', \quad \text{où} \quad S' = {}^tAS^{-1}$$

et comme

$${}^t(S') = {}^t({}^tAS^{-1}) = {}^tS^{-1}A = S^{-1}S\,{}^tAS^{-1} = {}^tAS^{-1} = S'$$

S' est symétrique et le tour est joué puisque $A = SS'$.

Remarques : - *On peut consulter*[1] *« The factorisation of a square matrix into two symmetric matrices » Amer.Math.Monthly 1986-6, page 462/64 pour une approche via la decomposition de Jordan et apprendre aussi que ce resultat est du a Frobenius lui même.*

- *Dans [**?**], on trouve cette jolie caractérisation des matrices diagonales réelles :* « Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable si, et seulement si, il existe une matrice S symétrique définie positive telle que ${}^tA = S^{-1}A^tS$ » .

La preuve n'est pas difficile : si A est diagonalisable, il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = D$ où D est diagonale. Donc $D = {}^tD = {}^tP^tA^tP^{-1}$, soit ${}^tP^tA^tP^{-1} = P^{-1}AP$ où encore ${}^tA = (P^tP)^{-1}A(P^tP)$ et la condition est nécessaire puisque $S = P^tP$ est symétrique définie positive.

Réciproquement, supposons qu'il existe S symétrique définie positive (vérification immédiate) telle que ${}^tA = S^{-1}AS$; S définie positive se factorise[2] *sous la forme $S = P^tP$ où $P \in GL_n(\mathbb{R})$, donc ${}^tA = {}^tP^{-1}P^{-1}AP^tP$ soit ${}^tP^tA^tP^{-1} = P^{-1}AP$ et finalement ${}^t(P^{-1}AP) = P^{-1}AP$. Ainsi, $P^{-1}AP$ est symétrique réelle, donc diagonalisable qui entraine à son tour A diagonalisable.*

Références