

Bases orthormées

Patrice Lassère¹

¹, Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

Exercice 0.1 ★ Bases orthormées

[?]

Soient $(e_1, \dots, e_d), (f_1, \dots, f_d)$ deux bases orthonormées d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$. Si $u \in \mathcal{L}(E)$, montrer que la quantité

$$\sum_{1 \leq i, j \leq d} \langle u(e_i), f_j \rangle^2 (\star)$$

est indépendante du choix de ces deux bases.

Solution : $(f_j)_1^d$ étant orthonormée, on a avec Pythagore

$$\sum_{1 \leq i, j \leq d} \langle u(e_i), f_j \rangle^2 = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \langle u(e_i), f_j \rangle^2 = \sum_{i=1}^d \|u(e_i)\|^2,$$

nous sommes donc déjà assurés que $(\star)$ ne dépend pas $(f_j)_1^d$. Il reste à prouver que

$$\sum_{i=1}^d \|u(e_i)\|^2 = \sum_{i=1}^d \|u(f_i)\|^2$$

Pour cela si $A = ((a_{i,j}))$ désigne la matrice de u dans la base $(e_i)_1^d$

$$\text{trace}(A^t A) = \sum_{1 \leq i, j \leq d} a_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^d \|u(e_i)\|^2$$

de même

$$\sum_{i=1}^d \|u(f_i)\|^2 = \text{trace}(B^t B)$$

où $B = \text{mat}(u, (f_j)_1^d) = P^{-1}AP$ et $P \in GL_d(\mathbb{R})$ est la matrice de passage entre les deux bases. Ces deux bases étant orthonormées, P est orthogonale i.e. $P^{-1} = {}^t P$ et par suite

$$\text{trace}(B^t B) = \text{trace}(P^{-1}AP^t(P^{-1}AP)) = \text{trace}(P^{-1}AP^tP^tA^tP) = \text{trace}(P^{-1}A^tAP) = \text{trace}(A^t A).$$

Références