

Autour de la trace

Patrice Lassère¹

¹, Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

Exercice 0.1 ★ Autour de la trace

[?]

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall X \in M_n(\mathbb{R}), \operatorname{tr}(X) = 0 \implies \operatorname{tr}(AX) = 0.$$

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_n$.

Solution : Muni du produit scalaire $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(A^t B)$, $M_n(\mathbb{R})$ est un espace euclidien et

$$E := \{ A \in M_n(\mathbb{R}) : \operatorname{tr}(A) = 0 \}$$

est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension $n^2 - 1$: c'est en effet le noyau de la forme linéaire

$$\varphi : A \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto \varphi(A) = \operatorname{tr}(A)$$

donc $\dim E + \dim(\operatorname{im}(\varphi)) = n^2 \implies \dim E = n^2 - \dim(\operatorname{im}(\varphi)) = n^2 - 1$ car $\operatorname{im}(\varphi)$ est un sous-espace non réduit à l'origine de $\mathbb{R}$ donc égal à $\mathbb{R}$.

Par suite $\dim E^\perp = 1$ et $E^\perp = \mathbb{R}I_n$ car bien sûr $I_n \in E^\perp$, mais

$$(\forall X \in M_n(\mathbb{R}), \operatorname{tr}(X) = 0 \implies \operatorname{tr}(AX) = 0 = \langle A, {}^t X \rangle) \iff (A \in E^\perp = \mathbb{R}I_n)$$

Références