Matrices symétriques

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

22 février 2024

Exercice 0.1 ★ ***Matrices symétriques***

[?]

Pour $A = ((a_{i,j})) \in M_n(\mathbb{R}),\ (n \in \mathbb{N}^\star)$ *symétrique et vérifiant* $A^2 = A$, *établir les inégalités suivantes :*

1. $0 \leq \displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} \leq n.$
2. $\displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}| \leq n\sqrt{\text{rang}(A)}.$
3. $\displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}| < n^{3/2}$ *si* $n \geq 2$.

Solution :

1. *Notons* $V = {}^t(1, 1, \dots, 1) \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, *par un calcul élémentaire*

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} = {}^tVAV = {}^tVA^2V = {}^tV({}^tAA)V = \|AV\|^2 \geq 0.$$

Pour l'inégalité de droite, remarquons que $B = ((b_{i,j})) = I_n - A$ *vérifie encore* ${}^tB = B$ *et* $B^2 = B$, *si bien que*

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} b_{i,j} = n - \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} \geq 0.$$

2. *Notons* $A' = ((|a_{i,j}|)) \in M_n(\mathbb{R})$ *et* $U = (V, V, \dots, V) \in M_n(\mathbb{R})$. $M_n(\mathbb{R})$ *étant muni de sa structure euclidienne canonique* $\langle A, B\rangle = \text{trace}({}^tAB)$, *par Cauchy-Schwarz*

$$\langle A', U\rangle^2 \leq \|A'\|^2 \|U\|^2$$

soit

$$\left(\sum_{1\le i,j\le n}|a_{i,j}|\right)^2 \le \left(\sum_{1\le i,j\le n} a_{i,j}^2\right)\left(\sum_{1\le i,j\le n} 1^2\right) (\bigstar)$$

mais

$$\sum_{1\le i,j\le n} a_{i,j}^2 = trace({}^tAA) = trace(A)$$

et puisque A est une matrice de projection trace$(A) = \text{rang}(A) \le n$ soit avec $(\bigstar)$

$$\left(\sum_{1\le i,j\le n}|a_{i,j}|\right)^2 \le n^2\text{rang}(A) \le n^3.$$

3. *Vu l'inégalité précédente, on aura toujours une inégalité large, et l'égalité équivaut à $\text{rang}(A) = n$ soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ puis $(A^2 = A)$ $A = I_n$, mais alors*

$$\sum_{1\le i,j\le n}|a_{i,j}| = n < n^{3/2} \quad \text{dès que} \quad n \ge 2,$$

d'où le résultat.

Références