Sur l'équation $S = X^2$ dans $M_n(\mathbb{C})$ avec S symétrique et X antisymétrique.

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

26 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Sur l'équation*** $S = X^2$ ***dans*** $M_n(\mathbb{C})$ ***avec*** S ***symétrique et*** X ***antisymétrique. Polytechnique***

[?].

Soit $S \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice symétrique réelle, donner une condition nécessaire et suffisante sur ses valeurs propres pour quelle soit le carré d'une matrice antisymétrique réelle.

Solution : *On va montrer que S est le carré d'une matrice antisymétrique réelle si et seulement si, toutes ses valeurs propres sont négatives et ses valeurs propres strictement négatives sont de multiplicité paire.*

- (condition suffisante). Si S est la matrice nulle, alors $S = 0^2$ et on peut supposer désormais $S \neq 0$. S est symétrique réelle, ses valeurs propres sont réelles et peuvent, vu les hypothèses, s'écrire sous la forme

$$-a_1^2, -a_1^2, -a_2^2, -a_2^2, \dots, -a_l^2, -a_l^2, 0, \dots, 0$$

où $a_1, a_2, \dots a_l \in \mathbb{R}_+^\star$ (et ne sont pas forcément distincts). Toujours parce que S est symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base orthonormée :

$$\exists\, O \in O_n(\mathbb{R}) \ : \quad O^{-1}SO = \mathrm{diag}(-a_1^2, -a_1^2, -a_2^2, -a_2^2, \dots, -a_l^2, -a_l^2, 0, \dots, 0).$$

Notons pour $k \in \{1, \dots, l\}$

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & -a_k \\ a_k & 0 \end{pmatrix}$$

et considérons la matrice diagonale par blocs

$$R = \mathrm{diag}(A_1, A_2, \dots, A_l, 0, \dots, 0) \in M_n(\mathbb{R}).$$

R est bien antisymétrique réelle et un calcul par blocs montre que

$$R^2 = \mathrm{diag}(-a_1^2, -a_1^2, -a_2^2, -a_2^2, \dots, -a_l^2, -a_l^2, 0, \dots, 0) = O^{-1}SO = {}^tOSO,$$

$OR\,{}^tO$ est une matrice antisymétrique réelle vérifiant $(OR\,{}^tO)^2 = S$, CQFD.

- Pour la condition nécessaire, si $S = R^2$ avec R antisymétrique, comme $R = -{}^tR$ on a $S = R^2 = -{}^tRR$ qui implique

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, \quad {}^tXSX = -{}^tX\,{}^tRRX = -\|RX\|^2$$

qui prouve que S est symétrique réelle négative : son spectre est donc inclu dans $\mathbb{R}_-$.

Les valeurs propres de S sont les carrés des valeurs propres de R qui sont donc imaginaire pures et stables par conjugaison puisque R est à coefficients réels. ($\lambda \in spec(S) \implies \pm i\sqrt{\lambda} \in spec(R)$) : elles sont donc de multiplicité paire. CQFD.

Références