# Matrices entières inversibles

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

22 février 2024

***Exercice 0.1*** ★ ***Matrices entières inversibles***

*[?]*

*Soient $A, B \in M_2(\mathbb{Z})$ telles que $A, A+B, A+2B, A+3B$ et $A+4B$ soient inversibles à inverses dans $M_2(\mathbb{Z})$. Montrer que $A+5B$ est inversible et que son inverse est encore à coefficients entiers.*

***Solution :*** *Il faut se souvenir qu'une matrice $M$ à coefficients entiers est inversible avec un inverse à coefficients entiers si et seulement si $\det(M) = \pm 1$ (si $M$ admet un tel inverse $N$ alors, $\det(M)\det(N) = \det(M)\det(N) = 1$ soit $\det(M) = \pm 1$ ; réciproquement si $\det(M) = \pm 1$ alors $\pm\widetilde{M}$ (où $\widetilde{M}$ est la transposée des cofacteurs de $M$) est l'inverse de $M$).*

*Considérons alors le polynôme de degré au plus 2, $f(x) = \det(A+xB)$. Vu les hypothèses et la remarque préliminaire $f(x) = \pm 1$ pour $x = 0, 1, 2, 3$ et $4$ ; par le principe des tiroirs $f$ prends une des valeurs $\pm 1$ au moins trois fois ce qui le force à être constant, en particulier $\det(A+5B) = \pm 1$, CQFD*

## Références