

Calcul de $\exp(A)$ où $A = ((\exp(2i\pi(k+l)/5)))_{k,l} \in M_5(\mathbb{C})$.

Patrice Lassère¹

¹, Université Paul Sabatier, Toulouse

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★ **Calcul de $\exp(A)$ où $A = ((\exp(2i\pi(k+l)/5)))_{k,l} \in M_5(\mathbb{C})$.**

[?].

Soit $\omega = e^{2i\pi/5}$ et $A = ((\omega^{k+l}))_{0 \leq k,l \leq 4} \in M_5(\mathbb{C})$.

1. A est-elle diagonalisable ?
2. Calculer $\exp(A)$.

Solution :

1. Nous avons

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \omega & \dots & \omega^4 \\ \omega & \omega^2 & \dots & \omega^5 \\ \omega^2 & \omega^3 & \dots & \omega^6 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega^4 & \omega^5 & \dots & \omega^8 \end{pmatrix},$$

les colonnes de A sont proportionnelles : A est donc de rang 1 et donc semblable à une matrice de la forme

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & ? \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \dots & ? \\ 0 & \dots & 0 & \text{tr}(A) \end{pmatrix}.$$

Mais $\text{tr}(A) = 1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$ implique que $B^2 = 0$ puis $A^2 = 0$: la matrice A n'est donc pas diagonalisable.

2. $A^2 = 0$ implique $A^n = 0$ pour tout entier $n \geq 2$, par conséquent $\exp(A) = I_5 + A$.

Références