Caractérisation des matrices nilpotentes par la trace

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

Exercice 0.1 ★ ***Caractérisation des matrices nilpotentes par la trace***

[?], [?] 2008.

1. *Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$ la trace de A^k est nulle. Montrer que A est nilpotente.*
2. *Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, établir l'équivalence des propriétés :*
   1) La seule valeur propre de A est 1.
   2) $tr(A) = tr(A^2) = \cdots = tr(A^n) = n$.

Solution : *Nous restons ici fidèlement sur la trace de Francinou, Gianella et Nicolas [?] qui proposent plusieurs solutions de ce classique problème.*

1. *- Sur $\mathbb{C}$, le polynôme caractérique de A est scindé. Raisonnons par l'absurde en supposant A non nilpotente. Alors A possède au moins des valeurs propres non nulles que l'on note $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, $1 \leq r \leq n$ de multiplicités respectives $n_1, \dots, n_r$. Par hypothèse nous avons pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$:*
$$\mathrm{tr}(\mathrm{A}^\mathrm{k}) = \mathrm{n}_1\lambda_1^\mathrm{k} + \cdots + \mathrm{n}_\mathrm{r}\lambda_\mathrm{r}^\mathrm{k}.$$
Écrire ces relations pour k variant de 1 à r équivaut à dire que le vecteur $(n_1, \dots, n_r)$ est solution du système linéaire
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_r^2 \\ \vdots & & & \dots \\ \lambda_1^r & \lambda_2^r & \dots & \lambda_r^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_r \end{pmatrix} = 0.$$
Et ce système est de Cramer puisque le déterminant de la matrice du système vaut[1]
$$\lambda_1 \dots \lambda_r \prod_{1 \leq i < j \leq r} (\lambda_i - \lambda_j)$$
donc nécessairement $n_1 = n_2 = \cdots = n_r = 0$ ce qui est exclu.

La seconde solution utilise les formules de Newton. Désignons cette fois-ci par $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *les racines du polynôme caractéristique* χ_A *comptées avec leur multiplicités. Dire que* $\mathrm{tr}(\mathrm{A}^\mathrm{k}) = 0$ *pour tout entier* $k \in \mathbb{N}^\star$ *revient exactement à dire que*

$$\mathrm{tr}(\mathrm{A}^\mathrm{k}) = 0 = \lambda_1^\mathrm{k} + \cdots + \lambda_\mathrm{n}^\mathrm{k} = 0, \quad \forall\, \mathrm{k} \in \mathbb{N}^\star$$

car A *étant semblable à une matrice triangulaire à coefficients diagonaux* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *les matrices* A^k *sont elles semblables à des matrices triangulaires à coefficients diagonaux* $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$*. Les formules de Newton*[2] *impliquent alors que les fonctions symétriques élémentaires des racines* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *sont nulles :*

$$\sigma_1 = \cdots = \sigma_n = 0.$$

On en déduit que[3]

$$\chi_A = X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}X + (-1)^n \sigma_n = X^n.$$

Soit $A^n = 0$ *d'aprés le théorème de Cayley-Hamilton*

Pour la troisième solution on procède par récurrence sur la taille de la matrice. Si $n = 1$, $\mathrm{tr}(\mathrm{A}) = 0$ *implique* $A = 0$*. Soit donc* $n \geq 2$*, et supposons le résultat vrai jusqu'au rang* $n - 1$*. Le polynôme caractéristique de* A

$$\chi_A = X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}X + (-1)^n \sigma_n$$

vérifie par Cayley-Hamilton

$$\chi_A(A) = 0 = A^n - \sigma_1 A^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}A + (-1)^n \sigma_n I_n$$

et en prenant la trace de cette dernière expression il vient

$$(-1)^n \sigma_n \cdot n = (-1)^\lambda_1 \dots \lambda_n n = (-1)^n n \det(A) = 0$$

soit $\det(A) = 0$. 0 *est donc valeur propre de* A *et on peut écrire*

$$\chi_A = X^p Q \quad \text{avec} \quad Q(0) \neq 0 \;\; \text{et} \;\; p \geq 1.$$

Le théorème de décomposition des noyaux assure alors que

$$\mathbb{K}^n = \ker(\chi_A(A)) = \ker(A^p) \oplus \ker(Q(A)).$$

Supposons maintenant $\ker(Q(A)) \neq \{0\}$*. Dans une base obtenue comme réunion d'une base de* $\ker(A^p)$ *et d'une base de* $\ker(Q(A))$*, l'endomorphisme* A *admet une matrice de la forme*

$$\begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}.$$

Mais $A'^p = 0$, A' *est donc nilpotente et par conséquent* $\mathrm{tr}(\mathrm{A'}^\mathrm{k}) = 0$, $\forall\, \mathrm{k} \in \mathbb{N}^\star$*. Maintenant, comme* A^k *est semblable à*

$$\begin{pmatrix} A'^k & 0 \\ 0 & B'^k \end{pmatrix}$$

on a nécessairement $\mathrm{tr}(\mathrm{B}'^{\mathrm{k}}) = 0,\ \forall\, \mathrm{k} \in \mathbb{N}^\star$ *: B' est aussi nilpotente. Mais par hypothèse, $Q(0) \neq 0$ qui implique que la restriction de A à* $\ker(Q(A))$ *est injective, soit B' inversible ce qui fournit la contradiction.*

On peut donc affirmer que $\ker(Q(A)) = \{0\}$, *soit* $\mathbb{K}^n = \ker(A^p)$ *et la matrice A est bien nilpotente.*

2. *Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A, comme rang(A^k) $= \lambda_1^k + \cdots + \lambda_n^k$ pour tout entier $k \in \{1, \dots, n\}$, l'implication* (1) $\Rightarrow$ (2) *est immédiate.*

   Pour (2) $\Rightarrow$ (1), *remarquons que spec*$(A - I_n) = \{\, \lambda - 1, \lambda \in$ *spec*$(A)\}$, *il est donc suffisant de montrer que la seule valeur propre de $A - I_n$ est* 0 *ou encore que $A - I_n$ est nilpotente.*

   D'aprés la première question, $A - I_n$ est nilpotente, si et seulement si, $\mathrm{tr}(A - I_n)^k = 0$ *pour tout entier $k \in \{1, \dots, n\}$, et cette dernière vérification est élémentaire car :*

$$\mathrm{tr}(A - I_n)^k = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} (-1)^l \mathrm{tr}(A^{k-l}) = n \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} (-1)^l = (1-1)^k = 0.$$

Références