Dans $M_n(\mathbb{C})$, tout hyperplan rencontre $GL_n(\mathbb{C})$ (1)

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★ ***Dans** $M_n(\mathbb{C})$**, tout hyperplan rencontre** $GL_n(\mathbb{C})$ **(1)***

*[**?**]-(2006).*
Soit $n \geq 2$.

1. *Montrer que si un hyperplan $\mathscr{H}$ de $M_n(\mathbb{C})$ contient toutes les matrices nilpotentes, alors il contient une matrice inversible.*
2. *Montrer que dans $M_n(\mathbb{C})$, tout hyperplan rencontre $GL_n(\mathbb{C})$.*

Solution :

1. *$\mathscr{H}$ est un hyperplan de $M_n(\mathbb{C})$: il existe donc une forme linéaire non nulle φ sur $M_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathscr{H} = \ker(\varphi)$. Tous les éléments $E_{i,j} = ((\delta_{i,j}^{k,l}))_{k,l}$ de la base canonique de $M_n(\mathbb{C})$ sont, si $i \neq j$ des matrices nilpotentes donc, vu les hypothèses, dans $\mathscr{H}$. Dans ce cas, la matrice*

$$A = E_{n,1} + \sum_{k=1}^{n-1} E_{k,k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

appartient à $\mathscr{H}$ comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathscr{H}$ mais visiblement $A \in GL_n(\mathbb{C})$ d'où le résultat.

2. *Soit $\mathscr{H} = \ker(\varphi)$, $(\varphi \in M_n(\mathbb{C})^\star \setminus \{0\})$ un hyperplan de $M_n(\mathbb{C})$.*
   - Si $\mathscr{H}$ contient toutes les matrices nilpotente, il n'y a rien à démontrer vu la question précédente.
   - Sinon, considérons une matrice nilpotente $N \notin \mathscr{H}$ i.e. $\varphi(N) \neq 0$ et posons

$$t := \frac{\varphi(I_n)}{\varphi(N)} \in \mathbb{C}.$$

Si $\varphi(I_n) = 0$ alors $I_n \in \mathscr{H} \cap GL_n(\mathbb{C})$ et le tour est joué. Sinon, puisque $\varphi(I_n - tN) = 0$ i.e. $I_n - tN \in \mathscr{H}$, et comme N est nilpotente ($N^n = 0$) on peut écrire

$$I_n = I_n - t^n N^n = (I_n - tN)\left(\sum_{k=0}^{n-1} t^k N^k\right) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} t^k N^k\right)(I_n - tN).$$

Autrement dit $I_n - tN$ est inversible. CQFD.

Références