Quelques propriétés topologiques de $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{U}_n(\mathbb{C})$

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

Exercice 0.1 ★ ***Quelques propriétés topologiques de $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{U}_n(\mathbb{C})$***

[?],

1. *Montrer que $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathscr{U}_n(\mathbb{C})$) est compact dans $M_n(\mathbb{R})$ (resp. $M_n(\mathbb{C})$).*
2. **Décomposition polaire généralisée :** *montrer que*

$$\forall\, M \in M_n(\mathbb{R}) \;:\; \exists\,(O,S) \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^+ \;\; \text{telles que } M = OS,$$

$$\forall\, M \in M_n(\mathbb{C}) \;:\; \exists\,(U,H) \in \mathscr{U}_n(\mathbb{C}) \times \mathscr{H}_n^+ \;\; \text{telles que } M = UH.$$

3. *Montrer que*

$$GL_n(\mathbb{R}) \underset{top.}{\simeq} \mathscr{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{+\star} \quad \text{et} \quad GL_n(\mathbb{C}) \underset{top.}{\simeq} \mathscr{U}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{H}_n^{+\star}.$$

4. *Montrer que $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathscr{U}_n(\mathbb{C})$) est un sous-groupe compact maximal dans $GL_n(\mathbb{R})$ (resp. $GL_n(\mathbb{C})$) (commencer par montrer que les valeurs propres de tout élément d'un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{K})$ sont de module 1).*

Solution :

1. *$\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est fermé dans $M_n(\mathbb{R})$ car $\mathscr{O}_n(\mathbb{R}) = \varphi^{-1}(\{I_n\})$ où φ est l'application continue sur $M_n(\mathbb{R})$ définie par $A \mapsto {}^tAA$. $|||.|||$ étant la norme sur $M_n(\mathbb{R})$ subordonnée à la norme euclidienne $\|.\|$ de $\mathbb{R}^n$, $A \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ implique $\|AX\| = 1$ et par suite $|||A||| = 1$. $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ fermé bornée dans $M_n(\mathbb{R})$ est bien compact. La procédure est analogue pour $\mathscr{U}_n(\mathbb{C})$.*

2. *On rappelle (voir ref. ????) que*

3.
4. *À suivre......*

Références