Sur l'équation $\sin(A) = B$

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

Exercice 0.1 ★ ***Sur l'équation*** $\sin(A) = B$

Putnam, 1996.

Existe-t-il une matrice $A \in M_2(\mathbb{C})$ vérifiant :

$$\sin(A) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2005 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ?$$

Solution : - ***Solution 1 :*** *Supposons qu'une telle matrice existe.*

$\rightsquigarrow$ *Si les deux valeurs propres (α et β) de A sont distinctes, A est diagonalisable ; il existe donc $C \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que*

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = CAC^{-1},$$

on à alors (car $A^n = CB^nB^{-1}$)

$$\sin(A) = C\sin(B)C^{-1} \quad \text{et} \quad \sin(B) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \begin{pmatrix} \alpha^{2n+1} & 0 \\ 0 & \beta^{2n+1} \end{pmatrix}^{2n+1} = \begin{pmatrix} \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & \sin(\beta) \end{pmatrix}$$

$\sin(A)$ *est donc diagonalisable ce qui est contraire à l'hypothèse.*

$\rightsquigarrow$ *Envisageons maintenant les cas où les valeurs propres de A sont égales. Il existe $C \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que*

$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} = CAC^{-1},$$

soit (en calculant B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$)

$$\sin(B) = C\sin(A)C^{-1} = \begin{pmatrix} \sin(x) & y\cos(x) \\ 0 & \sin(x) \end{pmatrix}$$

mais 1 est l'unique valeur propre de A, donc $\sin(x) = 0$, $\cos(x) = 0$, $B = I_2$ et finalement $A = I_2$

ce qui est absurde.

- ***Solution 2 :*** *Avec*

$$\cos(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} A^{2n}$$

on vérifie que

$$\sin^2(A) + \cos^2(A) = I_2$$

si bien que

$$\sin(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2005 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

implique

$$\cos^2(A) = \begin{pmatrix} 0 & -2.2005 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette dernière équation implique que la matrice $\cos^2(A)$ *est nilpotente, étant de taille* 2×2 *elle ne peut être que nulle ce qui est absurde.*

Références