Points isolés des solutions de l'équation $X^2 = I_n$ dans $M_n(\mathbb{R})$

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

11 mai 2023

Exercice 0.1 ★ ***Points isolés des solutions de l'équation*** $X^2 = I_n$ ***dans*** $M_n(\mathbb{R})$ ***Polytechnique***

[?]

Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$*, quel est l'ensemble des points isolés de l'ensemble des matrices dont le carré est égal à* I_n *?*

Solution : *Posons* $A = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^2 = I_n\}$*. Nous allons montrer que les points isolés de* A *sont* I_n *et* $-I_n$*. Le cas* $n = 1$ *étant trivial, on suppose dans la suite* $n \geqslant 2$*.*

Soit $M \in A$*. Le polynôme* $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ *étant annulateur de* M*, la matrice* M *est semblable à une matrice* $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix}$ *avec* $0 \leqslant p \leqslant n$*. On a*

$$\operatorname{tr} M = 2p - n, \quad \operatorname{tr} M = n \Leftrightarrow M = I_n \quad \text{et} \quad \operatorname{tr} M = -n \Leftrightarrow M = -I_n.$$

Soit φ *l'application de* A *dans* $\mathbb{R}$ *:* $M \mapsto \operatorname{tr} M$*. L'application* φ *est continue et* $\{I_n\} = \varphi^{-1}\left(]n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}[\right)$*. Ainsi,* $\{I_n\}$ *est un ouvert de* A *et* I_n *est donc un point isolé de* A*. On montre de même que* $-I_n$ *est un point isolé de* A*.*

Soit $M \in A \setminus \{I_n, -I_n\}$ *:* $M = P \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix} P^{-1}$*, où* $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *et* $1 \leqslant p \leqslant n-1$*. Notons* $E_{1,n}$ *la matrice élémentaire dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la 1ère ligne et* n*-ème colonne qui vaut 1. On constate que* $M_k = P \left[\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix} + \frac{1}{k} E_{1,n} \right] P^{-1}$ *(* $k \in \mathbb{N}^*$*) est élément de* A *et que la suite* (M_k) *tend vers* M *sans prendre la valeur* M*. Ainsi,* M *n'est pas isolé.*

Remarque : *Pour* $0 \leqslant p \leqslant n$*, on note* $A_p = \{M \in A \mid \operatorname{tr} M = 2p - n\}$*. On montre que les* A_p *sont les composantes connexes par arcs de* A*. On utilise pour cela l'écriture* $M = P \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix} P^{-1}$ *et on montre qu'on peut choisir* P *dans* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$*. Comme* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ *est connexe par arcs,* A_p *l'est aussi.*

Références